

**Titre:** Un critère général de plasticité et de rupture pour les matériaux à porosité variable  
Title:

**Auteurs:** Michel Aubertin, Li Li, Richard Simon, & Bruno Bussière  
Authors:

**Date:** 2003

**Type:** Rapport / Report

**Référence:** Aubertin, M., Li, L., Simon, R., & Bussière, B. (2003). Un critère général de plasticité et de rupture pour les matériaux à porosité variable (Rapport technique n° EPM-RT-2003-06). <https://publications.polymtl.ca/2608/>  
Citation:

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/2608/>  
PolyPublie URL:

**Version:** Version officielle de l'éditeur / Published version

**Conditions d'utilisation:** Tous droits réservés  
Terms of Use:

## Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

**Institution:** École Polytechnique de Montréal

**Numéro de rapport:** EPM-RT-2003-06  
Report number:

**URL officiel:**  
Official URL:

**Mention légale:**  
Legal notice:

EPM-RT-2003-06

**UN CRITÈRE GÉNÉRAL DE PLASTICITÉ ET DE  
RUPTURE POUR LES MATÉRIAUX À POROSITÉ  
VARIABLE / A GENERAL PLASTICITY AND FAILURE  
CRITERION FOR MATERIALS WITH VARIABLE  
POROSITY**

Michel Aubertin, Li Li, Richard Simon, Bruno Buissière  
Département des génies civils, géologique et des mines  
École Polytechnique de Montréal

Août 2003

Poly



**EPM-RT-2003-06**

**UN CRITÈRE GÉNÉRAL DE PLASTICITÉ ET DE RUPTURE  
POUR LES MATÉRIAUX À POROSITÉ VARIABLE**

**A GENERAL PLASTICITY AND FAILURE CRITERION  
FOR MATERIALS WITH VARIABLE POROSITY**

Michel AUBERTIN<sup>1,3</sup>, Li LI<sup>1</sup>, Richard SIMON<sup>1</sup>, Bruno BUSSIÈRE<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Département des Génies Civil, Géologique, et des Mines, École Polytechnique de Montréal,

C.P. 6079, Succursale Centre-ville, Québec, H3C 3A7, Canada

<sup>2</sup>Département des Sciences Appliquées, Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

445 boulevard de l'Université, Rouyn-Noranda, Québec, J9X 5E4, Canada

<sup>3</sup>Chaire Industrielle CRSNG-Polytechnique-UQAT Environnement et Gestion des Rejets Miniers

(<http://www.polymtl.ca/enviro-geremi/>).

**AOÛT 2003**

©2003

Michel Aubertin, Li Li,  
Richard Simon et Bruno Bussière  
Tous droits réservés

Dépôt légal :

Bibliothèque nationale du Québec, 2003  
Bibliothèque nationale du Canada, 2003

EPM-RT-2003-06

*Un critère général de plasticité et de rupture pour les matériaux à porosité variable/A general plasticity and failure criterion for materials with variable porosity*

par: Michel AUBERTIN<sup>1,3</sup>, Li LI<sup>1</sup>, Richard SIMON<sup>1</sup>, Bruno BUSSIÈRE<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Département des Génies Civil, Géologique, et des Mines, École Polytechnique de Montréal,

<sup>2</sup>Département des Sciences Appliquées, Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

<sup>3</sup>Chaire Industrielle CRSNG-Polytechnique-UQAT Environnement et Gestion des Rejets Miniers

Toute reproduction de ce document à des fins d'étude personnelle ou de recherche est autorisée à la condition que la citation ci-dessus y soit mentionnée.

Tout autre usage doit faire l'objet d'une autorisation écrite des auteurs. Les demandes peuvent être adressées directement aux auteurs (consulter le bottin sur le site <http://www.polymtl.ca>) ou par l'entremise de la Bibliothèque :

École Polytechnique de Montréal  
Bibliothèque – Service de fourniture de documents  
Case postale 6079, Succursale « Centre-Ville »  
Montréal (Québec)  
Canada H3C 3A7

Téléphone : (514)340-4846  
Télécopie : (514)340-4026  
Courrier électronique : [biblio.sfd@courriel.polymtl.ca](mailto:biblio.sfd@courriel.polymtl.ca)

Pour se procurer une copie de ce rapport, s'adresser à la Bibliothèque de l'École Polytechnique de Montréal.

Prix : 25.00\$ (sujet à changement sans préavis)

Régler par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal.

Toute commande doit être accompagnée d'un paiement sauf en cas d'entente préalable avec des établissements d'enseignement, des sociétés et des organismes canadiens.

**RÉSUMÉ:** Un grand nombre de formulations ont été développées pour décrire les conditions d'écoulement, le potentiel plastique et la rupture des matériaux d'ingénierie comme les métaux, les bétons, les céramiques, les plastiques, les roches, les sols et les remblais. Dans ce rapport, les auteurs revoient d'abord quelques critères communément utilisés pour définir la limite élastique et la rupture des matériaux poreux. On montre ensuite que les caractéristiques de plusieurs critères existants peuvent être représentées avec un seul système d'équations. Ce critère multiaxial est applicable à une grande variété de matériaux et de sollicitations. Une particularité du critère proposé, appelé  $\text{MSDP}_u$ , est le fait qu'il inclut explicitement une dépendance sur la porosité. La validité de la formulation générale est démontrée en utilisant des résultats expérimentaux obtenus sur plusieurs types de matériaux.

*Mots clés:* critère, rupture, plasticité, matériaux poreux, porosité.

**ABSTRACT:** A large number of formulations have been developed to describe the yielding condition, plastic potential, and failure state of engineering materials such as metal, concrete, ceramic, plastic, rock, soil, and backfill. In this report, the authors first recall some relatively common criteria used to describe yielding and failure of porous materials. It is then shown that the main features of a large number of these criteria can be represented by a unique set of equations. The ensuing multiaxial criterion is applicable to a wide diversity of materials and loading states. A particularity of the proposed criterion, named  $\text{MSDP}_u$ , is that it explicitly includes a porosity-dependency. The validity of this general criterion is demonstrated using experimental results obtained on various types of materials.

*Key words:* criterion, failure, plasticity, porous material, porosity.

## TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ .....	iii
ABSTRACT .....	iii
TABLE DES MATIÈRES .....	iv
1. INTRODUCTION .....	1
2. CRITÈRE MULTIAXIAUX POUR MATÉRIAUX POREUX .....	3
2.1 Caractéristiques générales .....	3
2.2 Évolution du développement des critères .....	4
3. CRITÈRE MSDP <sub>u</sub> POUR MATÉRIAUX POREUX .....	11
3.1 Description générale .....	11
3.2 Équations du critère MSDP <sub>u</sub> .....	13
3.3 Représentation graphique schématisé .....	15
3.4 Comparaison avec d'autres critères .....	16
4. APPLICATION DU CRITÈRE MSDP <sub>u</sub> .....	23
4.1 Identification des paramètres du critère MSDP <sub>u</sub> .....	23
4.2 Représentation graphique de résultats expérimentaux .....	26
4.3 Description et prédiction avec le critère MSDP <sub>u</sub> .....	39
4.4 Modification de la fonction $F_{\pi}$ .....	46
5. CONCLUSION .....	48
REMERCIEMENTS .....	48
RÉFÉRENCES .....	48
LISTE DES SYMBOLES .....	56
LISTE DES TABLEAUX .....	61
LISTE DES FIGURES .....	62

## 1. INTRODUCTION

Dans plusieurs applications nécessitant l'analyse du comportement mécanique des matériaux d'ingénierie (métaux, bétons, céramiques, plastiques, sols, roches, remblais, rejets miniers, etc.), il faut définir les conditions associées à divers états particuliers tel que la limite élastique, l'amorce de la propagation des fissures et la résistance au pic. Afin de décrire ces conditions, l'ingénieur emploie généralement des fonctions, appelées critères, exprimées dans l'espace des contraintes. On a ainsi développé au fil des ans de nombreuses expressions mathématiques pour représenter par exemple la limite du domaine élastique (critère d'écoulement ou de plasticité), l'état critique (pour un indice des vides stabilisé), le potentiel plastique (qui sert à définir les déformations inélastiques), le critère de rupture (associé à la résistance maximale) et la résistance résiduelle (post-pic, à grand déplacement). Pour ces divers états, il est possible d'utiliser une fonction générale unifiée, dont les paramètres sont définis de façon à représenter des phénomènes distincts.

Au fil des ans, un grand nombre de critères ont été développés pour les matériaux utilisés en ingénierie, incluant les géomatériaux. Plusieurs de ces critères ont été revus, analysés et comparés entre eux dans l'abondante littérature publiée sur le sujet au cours des trente dernières années; mentionnons en particulier les monographies de Yong et Ko (1981), Chen et Saleeb (1982), Desai et Siriwardane (1984), Chen et Baladi (1985), Lubliner (1990), Charlez (1991), Chen et Zhang (1991), François et al. (1991, 1995), Lade (1993, 1997), Skrzypek et Hetnarski (1993), Andreev (1995), Sheory (1997), Potts et Zdravkovic (1999), di Prisco et Pastor (2000), Desai (2001), Yu et al. (2003). Certaines des expressions les plus connues (et les plus utilisées) sont reprises plus loin dans ce rapport, afin de mettre en lumière certaines de leurs caractéristiques. Nous nous limiterons principalement au cas des matériaux isotropes montrant une certaine résistance frictionnelle.

Rappelons que pour des matériaux isotropes, la fonction  $F$  décrivant le critère d'intérêt (écoulement, rupture, etc.) s'exprime usuellement à partir des contraintes principales (soient  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , les contraintes principales majeure, intermédiaire et mineure, respectivement), ou d'une combinaison des invariants du tenseur des contraintes,  $\sigma_{ij}$ . On peut ainsi écrire:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (1a)$$

ou



$$F(I_1, J_2^{1/2}, \theta) = 0 \quad (1b)$$

où  $I_1 = \text{tr}(\sigma_{ij})$  représente le premier invariant du tenseur des contraintes,  $\sigma_{ij}$ ,  $J_2 = (1/2)S_{ij}S_{ij}$  est le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques  $S_{ij}$  (avec  $S_{ij} = \sigma_{ij} - (I_1/3)\delta_{ij}$ ;  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  et  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ );  $\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \frac{3\sqrt{3} J_3}{2\sqrt{J_2^3}}$  est l'angle de Lode qui reflète la géométrie des contraintes dans le plan octaédral (plan  $\pi$ ;  $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ );  $J_3 = 1/3 S_{ij} S_{jk} S_{ki}$  est le troisième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques  $S_{ij}$ .

Certains critères sont exprimés à partir d'une seule contrainte principale ( $\sigma_1$  ou  $\sigma_3$ ) ou des deux contraintes principales extrêmes ( $\sigma_1$  et  $\sigma_3$ ). Toutefois, pour des applications générales, il est usuellement admis que l'utilisation des trois contraintes principales est requise pour représenter adéquatement le comportement des matériaux soumis à des régimes de sollicitations multiaxiales.

Lorsque le critère est exprimé à partir des invariants cités plus haut, il est aussi possible de ne considérer qu'une seule composante (par exemple, seul  $J_2^{1/2}$  est employé avec le critère de von Mises), ou deux composantes ( $I_1$  et  $J_2^{1/2}$  pour le critère de Drucker-Prager). Une représentation générale du comportement des matériaux poreux requiert toutefois la combinaison de trois invariants distincts, incluant l'angle  $\theta$  proposé par Lode (1926) afin de mieux tenir compte de l'effet de la contrainte principale intermédiaire  $\sigma_2$  (Nayak et Zienkiewicz 1972; Slater 1977).

Il peut être pratique de décomposer la formulation d'un critère tridimensionnel, formant une surface dans l'espace ( $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$ ,  $\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z$  ou si les axes cartésiens sont les axes principaux), selon deux expressions qui donnent la position et la forme de la surface dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$  (fonction  $F_0$ ) et dans le plan octaédral (plan  $\pi$ ) qui est perpendiculaire à l'axe hydrostatique  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (fonction  $F_\pi$ ) (e.g., Desai et Siriwardane 1984; Aubertin et al. 1994). On peut ainsi écrire:

$$F = J_2^{1/2} - F_0 F_\pi = 0 \quad (2)$$

C'est la formulation de base qui est employée pour le modèle général proposé ici.

## **2. CRITÈRES MULTIAXIAUX POUR MATÉRIAUX POREUX**

### **2.1 Caractéristiques générales**

Le comportement des matériaux au-delà du domaine élastique dépend de plusieurs mécanismes de déformation. Pour les matériaux cristallins au comportement ductile (comme les métaux, la glace et certaines roches à haute température), la déformation inélastique est généralement contrôlée par le mouvement des dislocations, qui cause l'écrouissage et un possible endommagement dû à la création de vides. Pour les matériaux au comportement fragile, tels les matériaux consolidés et/ou cimentés (roches, bétons, plâtres, remblais, etc.), les déformations inélastiques sont dues principalement à l'initiation et à la propagation des fissures, pouvant éventuellement mener à une fracturation macroscopique souvent associée à la condition de rupture (Charlez 1991; Aubertin et al. 1998). Avec les matériaux meubles peu consolidés dont les particules sont faiblement liées (comme c'est le cas de la plupart des sols, des poudres, des céréales, etc.), c'est le glissement frictionnel des grains qui engendre les déformations inélastiques (en conditions drainées), jusqu'à ce qu'une résistance ultime ou critique (sans variation de l'indice des vides) soit atteinte (Lade 1977; Chen et Saleeb 1982).

Dans tous les cas, la mise en charge des matériaux utilisés par l'ingénieur engendre des phases de transition du comportement, tel le passage de la phase élastique à une phase inélastique ou de la phase pré-rupture à la phase post-rupture. Certaines de ces conditions de passage d'une phase à une autre peuvent être incluses dans les lois de comportement qui cherchent à décrire (ou même prédire) la réponse des matériaux soumis à des sollicitations particulières. De telles conditions sont exprimées par des fonctions mathématiques appelées critères. Dans la grande majorité des cas, ces critères sont formulés à partir des composantes du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$ , ou de ses invariants. Le critère peut être tracé graphiquement dans l'espace des contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) où il prend la forme d'une surface tridimensionnelle.

Pour les besoins d'ingénierie, on a très tôt développé des critères de plasticité (ou critère d'écoulement) afin de généraliser, dans l'espace tridimensionnel des contraintes, la notion de seuil de plasticité observée dans les essais uniaxiaux sur les métaux. Le critère utilisé pour définir le domaine d'élasticité est habituellement exprimé par une fonction scalaire de  $\sigma_{ij}$ . L'expérience a

montré que pour la plupart des matériaux isotropes et homogènes, le domaine d'élasticité (initial et actuel) est convexe (Halphen et Salençon 1987). Ceci implique donc que le critère utilisé pour définir mathématiquement ce domaine représente une surface convexe dans l'espace des contraintes.

En élastoplasticité, on utilise aussi un potentiel plastique dans la règle d'écoulement afin de définir, pour des sollicitations multiaxiales, la façon dont évoluent les déformations plastiques. Ce potentiel a souvent une forme mathématique proche (ou identique) au critère d'écoulement (e.g., Desai et Siriwardane 1984). De tels potentiels peuvent aussi être utilisés en visco-plasticité (Lemaître et Chaboche 1988; Lubliner 1990).

Il existe également des fonctions pour décrire la résistance ultime (critère de rupture), le seuil de propagation des fissures (critère d'endommagement), la condition de stabilisation de l'indice des vides (critère d'état critique), et la résistance résiduelle.

Les critères les plus utilisés en ingénierie comportent généralement un petit nombre de paramètres faciles à obtenir par des essais standards et ayant un sens physique clair. Un critère satisfaisant doit bien décrire les caractéristiques importantes du comportement observé. La formulation devrait être univoque et former une surface continue (et convexe) dans l'espace des contraintes. Il devrait aussi se réduire à des critères classiques (tels ceux de von Mises et de Coulomb) pour des cas particuliers. La formulation devrait de plus permettre de reproduire les particularités des fonctions plus élaborées développées au fil des ans, suite aux observations fondamentales du comportement des matériaux. En géoingénierie, on vise en particulier à reproduire certaines caractéristiques des modèles de type "état critique", soit le modèle de Cambridge (e.g., Roscoe et al. 1958, 1963; Roscoe et Burland 1968; Schofield et Worth 1968; Atkinson et Bransby 1978), et ses variations subséquentes (e.g., DiMaggio et Sandler 1971; Lade 1977; Baladi et Rohani 1979; Desai 1980; Michelis et Brown 1986; Novello et Johnston 1995, 1999), qui découlent d'observations expérimentales du comportement des sols et des roches.

## **2.2 Évolution du développement des critères**

Le développement des critères de plasticité et de rupture employés par l'ingénieur a suivi deux grands axes, soit celui des matériaux métalliques et celui des matériaux géotechniques (ou

géomatériaux).

Pour les métaux, il est courant d'utiliser des critères indépendants du premier invariant des contraintes  $I_1$  (ou de la contrainte moyenne  $\sigma_m = I_1/3$ ); c'est le cas avec les critères de Tresca et de von Mises. La composante frictionnelle associée à l'effet de la partie sphérique (ou hydrostatique) de  $\sigma_{ij}$  est alors jugée sans effet. Dans le cas de Tresca, le critère dépend de  $J_2$  et de  $J_3$  (les deuxièmes et troisième invariant du déviateur de contrainte), alors que seul  $J_2$  intervient dans la formulation de (Huber-) Mises. Ce dernier critère serait jugé plus représentatif du comportement des métaux (Halphen et Salençon 1987). La plupart des modèles employés avec les composés métalliques poreux (incluant les poudres métalliques) ont d'ailleurs comme racine commune le critère de von Mises, qui peut s'écrire  $J_2^{1/2} = (3^{1/2} \sigma_u)$  (où  $\sigma_u$  est la résistance uniaxiale) ou sa version modifiée par Schleicher (1926) pour tenir compte de la différence de résistance sous des chargements uniaxiaux en traction et en compression (e.g., Lubliner 1990). Le critère de von Mises a par la suite été étendu par Gurson (1977) pour décrire l'évolution des vides dans les matériaux poreux, donnant ensuite naissance à une variété de critères de même type (e.g., Tvergaard 1981, 1991; Tvergaard et Needleman 1984). Il existe aussi plusieurs autres critères pour les composés métalliques poreux qui se réduisent à celui de von Mises pour des cas particuliers (e.g., Hjelm 1994; Theocaris 1995; Altenbach et Tushtev 2001a, b; Altenbach et al. 2001).

Par ailleurs, le critère de Coulomb a servi de point de départ à la grande majorité des critères employés pour les géomatériaux (sols, roches, bétons, remblais, etc.). Dans sa version de base, le critère de Coulomb (ou de Mohr-Coulomb) ne fait intervenir que deux contraintes principales ( $\sigma_1$  et  $\sigma_3$ ), et deux paramètres du matériau ( $c$ , la cohésion et  $\phi$ , l'angle de friction interne). Il est représenté par une droite dans le plan de Mohr  $\sigma - \tau$  ( $\sigma$  et  $\tau$  sont la contrainte normale et de cisaillement sur un plan donné, respectivement) et dans le plan  $\sigma_1 - \sigma_3$ . Lorsque généralisé en trois dimensions, le critère de Coulomb est linéaire dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$  et il prend la forme d'un hexagone irrégulier dans le plan des contraintes octaédrales (plan  $\pi$ ), avec des axes de symétries correspondant aux six sommets du critère de Tresca dont il découle. Drucker et Prager (1952) ont proposé une version circulaire dans le plan  $\pi$  (donc proche de von Mises), tout en maintenant la relation linéaire entre  $I_1$  et  $J_2^{1/2}$  (sans faire intervenir  $\theta$  ou  $J_3$ ). Zienkiewicz et ses collaborateurs (Nayak et Zienkiewicz 1972; Zienkiewicz et al. 1972) ont pour leur part proposé une version modifiée du critère de Coulomb,

représenté par un triangle arrondi dans le plan  $\pi$ , avec les axes majeurs orientés selon un angle de Lode  $\theta$  de  $30^\circ$  (correspondant à la compression triaxiale conventionnelle, CTC).

Toujours à partir de Coulomb, une représentation plus générale du comportement des sols a été proposée avec le modèle de Cambridge (Roscoe et al. 1958, 1963; Schofield et Worth 1968), qui a ensuite donné naissance à de nombreuses expressions, dont certaines seront revues plus loin (tableau 1). Des versions générales inspirées des modèles de type "Cap" ont notamment été élaborées par Desai et ses collaborateurs (e.g., Desai 1980; Desai et Faruque 1982; Desai et Salami 1987; Desai 2001), et aussi plus récemment par Ehlers (1995).

Malgré ces nombreux développements, le critère simplifié de Drucker et Prager (1952) est encore utilisé régulièrement de nos jours pour les matériaux frictionnels en raison de sa simplicité (e.g., Boussine et al. 2001 pour les sols; Radi et al. 2002 pour les roches; Hsu et al. 1999 pour plusieurs autres matériaux poreux). On sait toutefois qu'il est peu représentatif de plusieurs aspects du comportement des matériaux poreux, en raison de sa linéarité dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$  (une limitation bien connue), et aussi parce qu'il néglige l'effet de  $J_3$  (ou de  $\theta$ ). Cette dernière a récemment été de nouveau mise en évidence par Peric et Ayari (2002a, b) qui ont montré que la génération de la pression interstitielle lors de chargement des géomatériaux dépend de l'angle de Lode  $\theta$ .

Parmi les critères multiaxiaux existants, certains incluent une dépendance vis-à-vis la porosité (initiale, ou actuelle) des matériaux. C'est le cas du modèle de Gurson (1977) et de ses multiples variantes (e.g., Tvergaard 1981; Tvergaard et Needleman 1984; Ponte-Castaneda et Zaidman 1994; da Silva et Ramesh 1997; Mahnken 1999, 2002; Ragab et Saleh 1999; Khan et Zhang 2000; Li et al. 2000; Perrin et Leblond 2000). C'est aussi le cas avec ceux de Shima et Oyane (1976) et Rousselier (1987).

Des synthèses comparatives (et souvent critiques) portant sur les divers critères existants ont été présentés par Chen et Saleeb (1982), Desai et Siriwardane (1984), Lade (1993), Olevsky et Molinari (2000), Mahnken (2002), Yu et al. (2002). Au cours des dernières années, on note aussi l'apparition de fonctions plus générales développées de façon convergente afin de reproduire dans un cadre unifié les caractéristiques des principaux critères développés pour les divers matériaux poreux (e.g.,

Haggblad et Oldenburg 1994; Ehlers 1995; Desai 2001; Lewis et Khoei 2001; Mahnken 2002). C'est aussi le cas du critère proposé à la Section 3.

Le Tableau 1 présente les principales équations de plusieurs critères multiaxiaux développés et utilisés pour les matériaux d'ingénierie, et ayant une composante frictionnelle (i.e. avec une influence de  $I_1$ ). Une présentation schématique des surfaces découlant de ces divers critères est montrée à la figure 1.

Lorsque observés dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$ , quelques critères sont linéaires (comme Drucker-Prager et Matsuoka-Nakai), mais la majorité montre une forme incurvée. Toutes les surfaces des critères existants sont fermées sur l'axe de  $I_1$  en traction (pour  $I_1 \leq 0$ ), à l'exception des critères de plasticité de von Mises et de Tresca (non montré ici). Sur l'axe  $I_1$  positif (en compression), certaines sont ouvertes (e.g., critères de Schleicher, Drucker-Prager, Hoek-Brown 3D, Matsuoka-Nakai, Ottosen), mais plusieurs autres se referment afin de refléter l'écrasement possible de la structure poreuse sous forte charge. C'est le cas avec les modèles qui incluent une portion fermée, appelée CAP, issue des travaux de Roscoe et al. (1958, 1963) pour les sols et de Gurson (1977) pour les métaux; on y retrouve les critères de DiMaggio et Sandler (1971), Tvergaard (1981), Shima et Oyan (1976), Desai (1980), Tvergaard et Needleman (1984), Ehlers (1995), Hansen et al. (1998), Lee et Oung (2000).

Quelques critères, comme ceux de Gurson (1977), Shima et Oyane (1976), Sofronis et McMeeking (1992) et Hansen et al. (1998), ne font pas de distinction entre une valeur de  $I_1$  positive ou négative (ils sont symétriques de chaque côté de l'axe  $J_2^{1/2}$ ).

La plupart des critères montrent une singularité au point d'intersection à la valeur minimale de  $I_1$  ( $J_2^{1/2}$ ), bien que quelques uns soient plutôt arrondis (tel Mises-Schleicher et Cam Clay modifié).

Dans le plan  $\pi$ , certains modèles ont adopté une forme circulaire, avec une valeur de résistance  $J_2^{1/2}$  indépendante de l'angle de Lode  $\theta$  (comme avec le critère de von Mises). C'est le cas par exemple des critères de Schleicher (1926), Drucker et Prager (1952), de Roscoe et al. (1958, 1963; aussi Roscoe et Burland 1968), de DiMaggio et Sandler (1971), de Gurson (1977), et de Tvergaard (1981). D'autres critères adoptent plutôt une forme d'hexagone asymétrique, découlant du critère de

Tresca. C'est notamment le cas avec la version 3D générale des critères de Mohr-Coulomb et de Hoek-Brown 3D (Pan et Hudson 1988), et celui de Hansen et al. (1998). Il y a enfin ceux qui utilisent une forme de triangle arrondi, tel que proposé par Nayak et Zienkiewicz (1972), et Zienkiewicz et al. (1972); cela inclus ceux de Lade et Duncan (1973, 1975), Matsuoka et Nakai (1974), Lade (1977, 1997), Ottosen (1977), Desai (1980), Ehlers (1995) et Jrad et al. (1995).

Tableau 1. Quelques critères tridimensionnels utilisés pour les matériaux poreux frictionnels.

Nom du critère	Équations et paramètres	Références
Mises-Schleicher	$\sqrt{J_2} = \sqrt{((\sigma_e - \sigma_t)I_1 + \sigma_e \sigma_t)/3}$	Schleicher (1926)
Drucker-Prager	$\sqrt{J_2} = \alpha I_1 + k$ $k = (\sigma_e - \sigma_t)/(12\alpha) + \alpha(\sigma_e \sigma_t)/(\sigma_e - \sigma_t)$ , $\alpha = 2\sin\phi / (\sqrt{3}(3 - \sin\phi))$	Drucker et Prager (1952)
Mohr-Coulomb	$\sqrt{J_2} = ((I_1/3)\sin\theta + c\cos\theta)/(\cos\theta - \sin\theta\sin\phi/\sqrt{3})$ $c$ et $\phi$ , cohésion et angle de frottement du matériau, respectivement	Chen et Saleeb (1982)
Cam-Clay	$\sqrt{J_2} = -\alpha_{cm} I_1 \ln(I_1/I_{10})$	Roscoe et al. (1958, 1963)
Cam-Clay modifié	$\sqrt{J_2} = \alpha_{cm} \sqrt{I_1(I_{10} - I_1)}$	Roscoe et Burland (1968)
DiMaggio-Sandler	surface fixe: $f_1 = \sqrt{J_2} + \gamma \exp(-\beta I_1) - \alpha = 0$ "Cap": $f_2 = R^2 J_2 + (I_1 - C)^2 = R^2 b^2$ $R$ , ratio entre les axes majeur $a$ et mineur $b$ de l'ellipse; $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ , $C$ , paramètres du matériau	DiMaggio et Sandler (1971)
SMP	$2/\sqrt{3}(\sqrt{J_2}/I_1)^3 \sin 3\theta + (3/k - 1)(\sqrt{J_2}/I_1)^2 + (1/9 - 1/k) = 0$ $k$ , paramètre du matériau	Matsuoka et Nakai (1974)
Shima-Oyane	$3J_2/\sigma_M^2 + a_1 n^{a_2} (I_1/(3\sigma_M))^2 - (1 - n)^5 = 0$ $a_1$ , $a_2$ , deux paramètres du matériau	Shima et Oyane (1976)
Gurson	$3J_2/\sigma_M^2 + 2ncosh(I_1/(2\sigma_M)) - (1 + n^2) = 0$	Gurson (1977)
Lade	$(I_1^3/I_3 - 27)(I_1/p_a)^m - k = 0$ $p_a$ , pression atmosphère; $m$ et $k$ , paramètres du matériau	Lade (1977)
Ottosen	$a(\sqrt{J_2}/\sigma_e)^2 + \lambda(\sqrt{J_2}/\sigma_e) - b(I_1/\sigma_e) - 1 = 0$ $a$ et $b$ , constantes; $\lambda$ , fonction de l'angle de Lode $\theta$ : $\lambda = k_1 \cos((1/3)\cos^{-1}(-k_2 \sin 3\theta))$ , pour $30^\circ \geq \theta \geq 0^\circ$	Ottosen (1977)

$$\lambda = k_1 \cos(60^\circ - (1/3) \cos^{-1}(k_2 \sin 3\theta)), \text{ pour } 0^\circ \geq \theta \geq -30^\circ$$

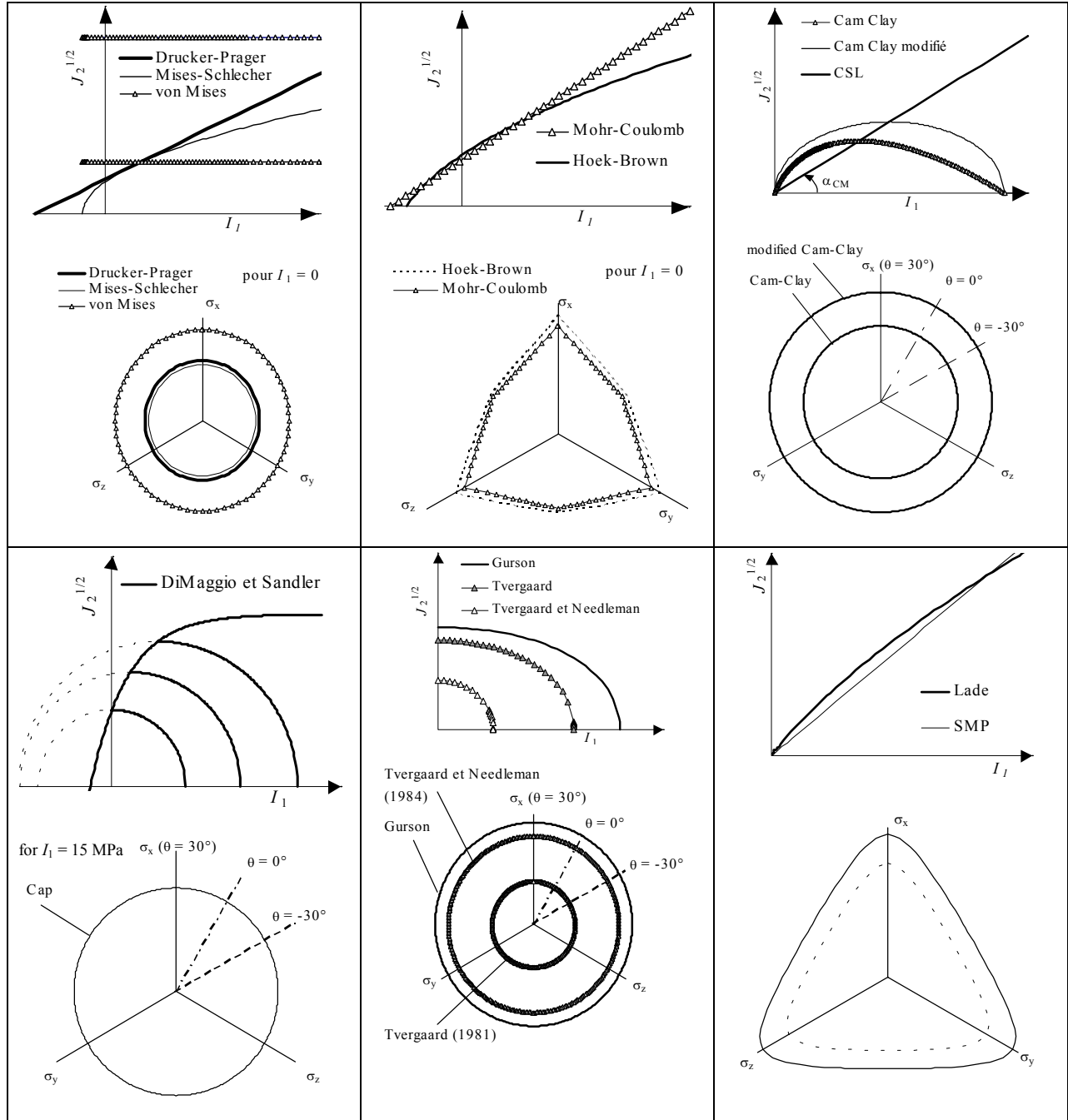
$k_1$  et  $k_2$ , constantes

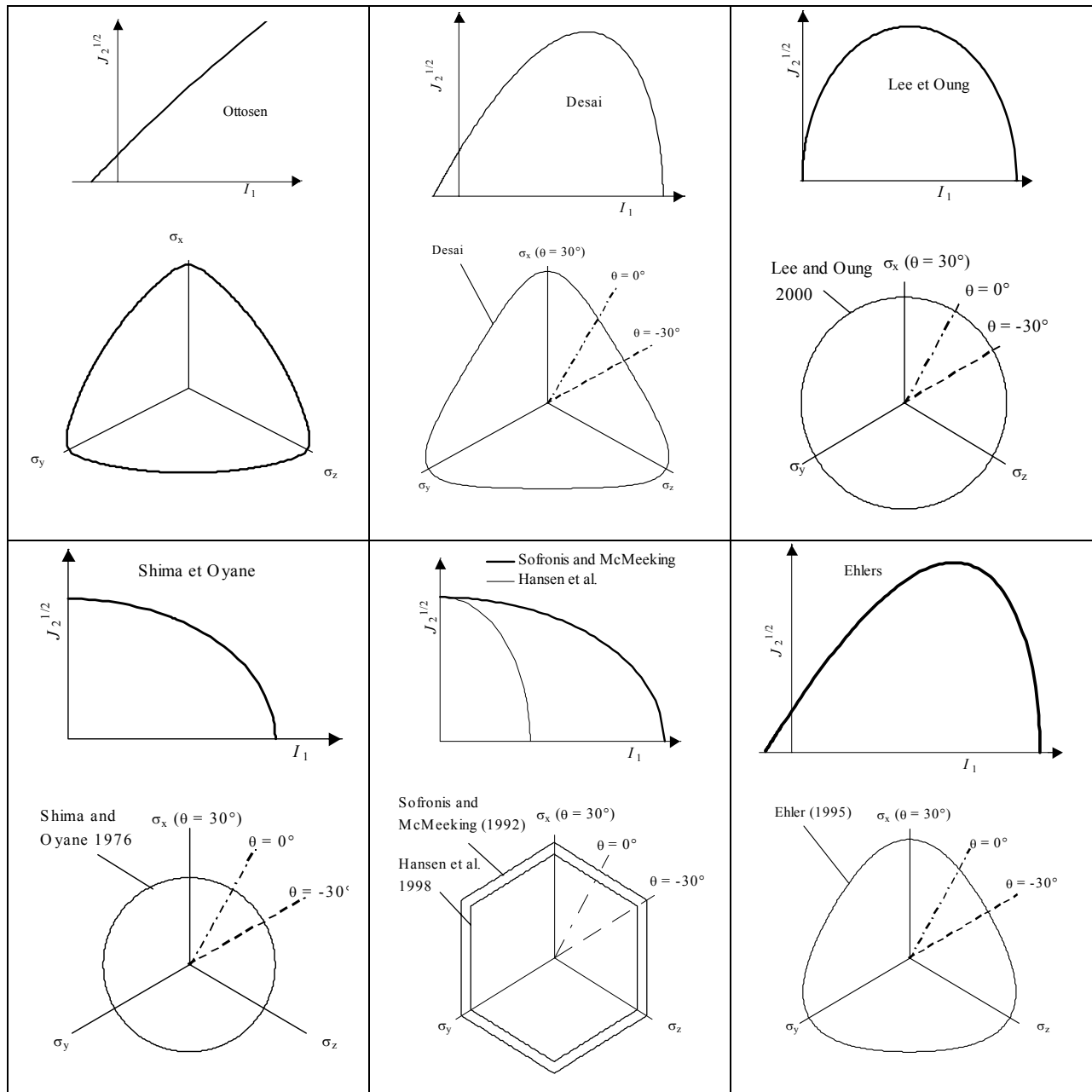
Desai	$J_2 = (-\alpha(I_1 + I_{1s})^m p_a^{2-m} + \gamma(I_1 + I_{1s})^2)(1 - \beta \sin 3\theta)^{-1/2}$ <p><math>I_{1s}</math>, décalage de l'axe <math>I_1</math> relié à la résistance en traction uniaxiale;  <math>m</math>, paramètre relié au changement de phase  (de contractant à dilatant);  <math>\gamma</math> et <math>\beta</math>, paramètres du matériau;  <math>\alpha</math>, fonction de durcissement.</p>	Desai (1980)
Gurson modifiés	$3J_2 / \sigma_M^2 + 2q_1 n \cosh(q_2 I_1 / (2\sigma_M)) - (1 + (q_1 n)^2) = 0$ $3J_2 / \sigma_M^2 + 2q_1 n^* \cosh(q_2 I_1 / (2\sigma_M)) - (1 + (q_1 n^*)^2) = 0$ <p><math>q_1</math> et <math>q_2</math>, deux paramètres du matériau;  <math>n^*</math>, fonction de la porosité:  <math>n^* = n</math> pour <math>n \leq n'</math>  <math>n^* = n' + (1/q_1 - n')/(n_C - n')</math> pour <math>n &gt; n'</math>  <math>n_C</math>, porosité critique à la rupture;  <math>n'</math> (<math>&lt; n_C</math>), seuil lié aux effets de la coalescence des vides</p>	Tvergaard (1981, 1990) Tvergaard et Needleman (1984)
Hoek-Brown	$2\sqrt{J_2} \cos \theta - \left[ \frac{m\sigma_c}{\sqrt{3}} (\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta) \sqrt{J_2} + \frac{1}{3} I_1 m \sigma_c + s \sigma_c^2 \right]^{1/2} = 0$ <p><math>m</math> et <math>s</math>, paramètres</p>	Pan et Hudson (1988)
Sofronis-McMeeking	$2\sqrt{J_2} \cos \theta = \left( 1 - \left( \frac{mn}{(1 - n^{1/m})^m} \right)^{\frac{2}{m+1}} \left( \frac{I_1}{2m} \right)^2 \right)^{1/2} \left( \frac{1+n}{1-n} \right)^{\frac{-m}{m+1}}$ <p><math>m</math>, paramètre du matériau.</p>	Sofronis et McMeeking (1992)
Ehlers	$\sqrt{J_2 (1 - 2/(3\sqrt{3}) \gamma \sin 3\theta)^m + \alpha I_1^2 / 2 + \delta^2 I_1^4 - \beta I_1 + \varepsilon I_1^2 - \kappa} = 0$ <p><math>\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \gamma, \kappa</math>, et <math>m</math>, paramètres du matériau</p>	Ehlers (1995)
Sel gemme broyé	$2\sqrt{J_2} \cos \theta = (1 + n^2 - \kappa_0 \Omega \kappa_1 I_1^2 / 9)^{1/2} \kappa_2^{-1/2} ((1+n)/(1-n))^{-\frac{m}{m+1}}$ $\Omega = (n_v m (1 - n_v^{1/m})^{-m})^{\frac{2}{m+1}};$ <p><math>n_v = n</math>, for <math>n \geq n_t</math>  <math>n_v = n</math>, for <math>n &lt; n_t</math>  et <math>\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, m</math> et <math>n_t</math>, paramètres du matériau</p>	Hansen et al. 1998
Lee et Oung	$3J_2 + \frac{n}{4} I_1^2 + (1-n)(C-T)(-I_1) - (1-n)^2 CT = 0$ <p><math>C</math> et <math>T</math>, valeurs absolues des résistances en compression  et en traction uniaxiales du matériau équivalent non poreux</p>	Lee et Oung (2000)

Nota:  $I_{10}$ , valeur de  $I_1$  à l'écrasement du matériau sous une pression hydrostatique;  $I_3$ , troisième invariant du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$ ;  
 $n$ , porosité;  $\sigma_c$  et  $\sigma_t$ , résistances en compression et traction uniaxiales, respectivement;  $\sigma_M$ , contrainte d'écoulement d'un matériau équivalent non poreux;  $\alpha_{CM}$ , pente de la ligne d'état critique (CSL) dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$



Figure 1. Représentation schématisée des surfaces associées à plusieurs critères utilisés pour les matériaux poreux (les axes  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  représentent les axes principaux).





### 3. CRITÈRE MSDP<sub>u</sub> POUR MATÉRIAUX POREUX

#### 3.1 Description générale

Le critère MSDP<sub>u</sub> a d'abord été élaboré afin de décrire le comportement des roches dures et autres matériaux fragiles de faible porosité. Ses caractéristiques de base ont été décrites dans Aubertin et Simon (1996, 1998) et Aubertin et al. (1999). Le critère peut être représenté par une surface dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$  qui se réduit au critère incurvé de Mises-Schleicher à faible contrainte

moyenne et qui tend progressivement vers un critère de type Drucker-Prager (ou Coulomb) pour  $I_1$  élevé. Dans le plan  $\pi$ , la surface prend généralement la forme d'un triangle arrondi. Les paramètres qui servent à définir la position et la forme de la surface sont des paramètres faciles à obtenir, incluant la résistance en traction et en compression uniaxiale ( $\sigma_t$  et  $\sigma_c$ ), et l'angle de friction sur les surface aplanies ( $\phi_b$ ). Pour les matériaux fragiles peu poreux, tels les roches dures et certains bétons, le critère MSDP<sub>u</sub> constitue une version généralisée en 3D du critère de Griffith (1924) modifié par Brace (1960) et McClintock et Walsh (1962). Il tient ainsi compte du fait que, pour de tels matériaux, l'amorce de la propagation des fissures et la résistance au pic sont contrôlées, à forte contrainte de confinement (ou forte valeur de  $I_1$  ou  $\sigma_m$ ), par la friction mobilisable sur les faces des fissures fermées.

Par la suite, ce critère a été étendu au cas des roches poreuses et des massifs rocheux (Aubertin et al. 2000), en ajoutant notamment une portion qui se referme sur l'axe positif de  $I_1$  (sous forme d'un "Cap").

Des travaux récents ont aussi permis de développer une relation entre la résistance uniaxiale à la rupture en compression ( $\sigma_c$ ) ou en traction ( $\sigma_t$ ) et la porosité (Li et Aubertin 2003). La porosité  $n$  constitue un paramètre simple et pratique pour définir les principales caractéristiques de la microstructure des matériaux isotropes.

Pour cette raison, on emploie souvent la porosité afin de relier les propriétés effectives d'un matériau (tel les modules élastiques  $E$ ,  $G$ , la vitesse de propagation des ondes, la perméabilité, la résistance électrique et la résistance uniaxiale à la rupture) au volume des vides qu'on y retrouve. Une revue détaillée des relations qui existent entre la porosité  $n$  et diverses caractéristiques des matériaux poreux a été présentée par Chen et Nur (1994). Ces auteurs montrent également diverses approches utilisées pour introduire certaines caractéristiques particulières associées à la porosité (distribution, forme, concentration des vides) dans des modèles de comportement. Tout comme les travaux de Li et Aubertin (2003), les résultats présentés par Chen et Nur (1994) ont mis en évidence l'existence d'une porosité critique (ou concentration des vides de transition) au-delà de laquelle certaines propriétés changent de façon marquée, en raison notamment de la non uniformité de la distribution interne des zones de contact. Cette porosité critique  $n_C$  est généralement inférieure à 100% (ou  $n_C \leq$

1). Par exemple, la résistance en compression uniaxiale des roches peut devenir nulle lorsque  $n$  est supérieure à 40 à 70% environ. L'existence d'une porosité critique  $n_C$  a aussi été introduite par Tvergaard et Needleman (1984) pour décrire le comportement de matériaux poreux. La valeur de cette porosité critique  $n_C$  dépend de la forme des pores et des grains qui les entourent. Tel que montré par Logan (1987) et Chen et Nur (1994), il est souvent utile d'introduire l'influence de la porosité initiale (par rapport à la porosité critique) dans la formulation d'un critère pour les matériaux d'ingénierie. C'est ce qui est proposé ici.

### 3.2 Équations du critère MSDP<sub>u</sub>

Le critère multiaxial général MSDP<sub>u</sub> est exprimé en terme des invariants de contrainte à partir de l'équation (2). Les formulations spécifiques retenues sont:

$$F_0 = \left[ \alpha^2 (I_1^2 - 2\tilde{a}_1 I_1) + \tilde{a}_2^2 - a_3 \langle I_1 - I_c \rangle^2 \right]^{1/2} \quad (3)$$

où  $\alpha$ ,  $\tilde{a}_1$ ,  $\tilde{a}_2$ ,  $a_3$  et  $I_c$  sont des paramètres du matériau, qui sont définis à partir de leurs propriétés usuelles. Ainsi, le paramètre  $\alpha$  est relié à l'angle de frottement  $\phi$ :

$$\alpha = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin\phi)} \quad (4)$$

Pour les matériaux relativement peu poreux, on utilise  $\phi \equiv \phi_b \equiv \phi_r$  (l'angle de frottement de base ou résiduel). Les paramètres  $\tilde{a}_1$ ,  $\tilde{a}_2$ ,  $a_3$  et  $I_c$  sont pour leur part définis comme suit:

$$\tilde{a}_1 = \Gamma a_{1n} = \left( \frac{\tilde{\sigma}_c - \tilde{\sigma}_t}{2} \right) - \left( \frac{\tilde{\sigma}_c^2 - (\tilde{\sigma}_t/b)^2}{6\alpha^2(\tilde{\sigma}_c + \tilde{\sigma}_t)} \right) \quad (5)$$

$$\tilde{a}_2 = \Gamma a_{2n} = \left\{ \left( \frac{\tilde{\sigma}_c + (\tilde{\sigma}_t/b^2)}{3(\tilde{\sigma}_c + \tilde{\sigma}_t)} - \alpha^2 \right) \tilde{\sigma}_c \tilde{\sigma}_t \right\}^{1/2} \quad (6)$$

$$a_3 = a_{3n} \quad (7)$$

$$I_c = I_{cn} \quad (8)$$

avec

$$\tilde{\sigma}_c = \Gamma \sigma_{cn} \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_t = \Gamma \sigma_{tn} \quad (9a, 9b)$$

Ici,  $\Gamma$  est un paramètre de continuité qui peut être considéré comme équivalent à une variable d'endommagement isotrope  $D (= 1 - \Gamma)$ , tel que définit dans l'approche de Kachanov-Rabotnov à la base de la mécanique d'endommagement (Lemaître 1992; Krajcinovic 1996). Ce paramètre a été introduit pour décrire l'influence des défauts continus à grande échelle dans la structure, comme les réseaux de fractures dans les massifs rocheux (Aubertin et al. 2000). Dans la suite de ce document, on pose  $\Gamma = 1$ , d'où  $\tilde{a}_1 = a_{1n}$ ,  $\tilde{a}_2 = a_{2n}$  (et  $\tilde{\sigma}_c = \sigma_{cn}$  et  $\tilde{\sigma}_t = \sigma_{tn}$ ).

Avec MSDP<sub>u</sub>, l'influence des défauts ponctuels sur les résistances des matériaux poreux est prise en compte à travers les paramètres  $a_{1n}$ ,  $a_{2n}$ ,  $a_{3n}$ ,  $I_{cn}$ , via leur dépendance sur  $n$ . Pour cela, on utilise d'abord la relation de Li et Aubertin (2003) pour décrire les résistances uniaxiale  $\sigma_{un}$  en fonction de la porosité:

$$\sigma_{un} = \left\{ \sigma_{u0} \left( 1 - \sin^{x_1} \left( \frac{\pi}{2} \frac{n}{n_C} \right) \right) + \langle \sigma_{u0} \rangle \cos^{x_2} \left( \frac{\pi}{2} \frac{n}{n_C} \right) \right\} \left\{ 1 - \frac{\langle \sigma_{u0} \rangle}{2\sigma_{u0}} \right\} \quad (10)$$

où  $\sigma_u$  est la résistance uniaxiale, qui peut être utilisée pour la compression ( $\sigma_{un} = \sigma_{cn}$ ) ou la traction ( $\sigma_{un} = \sigma_{tn}$ ). Dans cette équation,  $n_C$  est la porosité critique pour laquelle  $\sigma_{un}$  devient nulle, en traction ( $n_C = n_{Ct}$ ) et en compression ( $n_C = n_{Cc}$ ); le paramètre  $\sigma_{u0}$  représente la valeur (théorique, extrapolée) de  $\sigma_{un}$  pour  $n = 0$ . Enfin,  $x_1$  et  $x_2$  sont deux paramètres propres du matériau;  $\langle \rangle$  sont les crochets de MacCauley (définis par  $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ ).

Les paramètres  $a_{3n}$  et  $I_{cn}$  servent pour leur part à représenter le comportement des matériaux poreux sous forte compression hydrostatique, lorsque la surface (écoulement, rupture) se referme du côté positif de  $I_1 (> I_{cn})$ . La dépendance de  $a_{3n}$  et  $I_{cn}$  sur la porosité est discutée plus loin dans ce rapport (voir Section 4.1). À noter que pour les matériaux denses (peu poreux),  $I_{cn}$  est très grand de sorte que cette portion du critère tend à disparaître (la surface reste alors ouverte le long de l'axe  $I_1$  positif).

La surface dans le plan octaédral ( $\pi$ ), qui est perpendiculaire à l'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , est représentée par une fonction de l'angle de Lode (Aubertin et al. 1994):

$$F_\pi = \left[ \frac{b}{[b^2 + (1-b^2)\sin^2(45^\circ - 1.5\theta)]^{1/2}} \right]^\nu \quad (11)$$

avec

$$\nu = \exp(-\nu_1 I_1) \quad (12)$$

Ici,  $\nu$  est un exposant qui reflète l'effet de la pression hydrostatique sur l'évolution de la forme de la surface dans le plan  $\pi$ ;  $\nu_1$  un paramètre propre au matériau. Pour une forme qui ne change pas avec  $I_1$ , on adopte  $\nu_1 = 0$  (ou  $\nu = 1$ ). Le paramètre  $b$  contrôle de son côté l'asymétrie de la surface entre  $\theta = 30^\circ$  et  $-30^\circ$  dans le plan  $\pi$ .

Les équations (1) à (12) constituent le critère général unifié MSDP<sub>u</sub> pour les matériaux poreux.

### 3.3 Représentation graphique schématisée

On peut voir à la figure 2 l'allure schématisée du critère MSDP<sub>u</sub> dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$  (Fig. 2a), dans le cas de la compression triaxiale conventionnelle (CTC,  $\theta = 30^\circ$ ), pour des valeurs de porosité croissantes; on montre aussi la surface dans le plan  $\pi$  pour une valeur unitaire de  $\nu$  (Fig. 2b). La figure 2 correspond à une condition  $I_1 < I_{cn}$ . On constate sur cette figure que l'augmentation de la porosité (de  $n_1$  à  $n_2$  à  $n_3$ ) réduit la taille de la surface (ou l'ampleur de  $J_2^{1/2}$  pour des valeurs  $I_1$  et  $\theta$  données). Cela reflète l'effet de la baisse des résistances  $\sigma_{cn}$  et  $\sigma_{tn}$  lorsque la porosité augmente.

À la figure 3, on peut voir l'effet que peut avoir la contrainte moyenne  $I_1$  sur le forme du critère dans le plan  $\pi$ , lorsque  $\nu$  tend vers 0 (ou  $F_\pi$  tend vers 1) à  $I_1$  élevée. Cette situation serait associée au changement des mécanismes physiques décrits par la surface, d'un comportement frictionnel ( $F_\pi < 1$ ) à un comportement ductile/plastique ( $F_\pi = 1$ ) qui peut survenir dans le cas des matériaux cristallins (Aubertin et al. 1994, 1998).

À la figure 4, on montre l'allure schématisée de la surface du critère  $\text{MSDP}_u$  pour un matériau montrant une valeur relativement faible de  $I_{cn}$  (jusqu'à  $I_1$  qui excède  $I_{cn}$ ). Dans ce cas, la portion fermée ("Cap") apparaît dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$  (montré en CTC), et la surface se referme sur l'axe positif de  $I_1$ . Cette composante du critère varie également avec la porosité.

Lorsque la composante frictionnelle est considérée négligeable (cas des métaux poreux ductiles), on peut obtenir  $\alpha = 0$  (ou  $\phi = 0$ ). L'équation (3) devient alors:

$$F_0 = \left( \frac{\sigma_{cn}^2 (I_1 + \sigma_{tn}) - (\sigma_{tn} / b)^2 (I_1 - \sigma_{cn})}{3(\sigma_{cn} + \sigma_{tn})} - a_{3n} \langle I_1 - I_{cn} \rangle^2 \right)^{1/2} \quad (13)$$

Cette version du critère ressemble à une surface de type Gurson-Tvergaard, comme on peut voir à la figure 5 (voir aussi la Section 3.4). À nouveau, la position de la surface dépend de la porosité.

La figure 6 montre la forme de la surface dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$  (en CTC) pour un matériau frictionnel consolidé. On y montre schématiquement l'effet de la porosité (Fig. 6a), de l'angle de friction (Fig. 6b), de la résistance en compression uniaxiale (Fig. 6c) et en traction uniaxiale (Fig. 6d), du seuil  $I_{cn}$  (Fig. 6e), et du paramètre  $a_{3n}$  (Fig. 6f). Une vue tridimensionnelle de la surface complète dans l'espace  $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$  est montrée à la figure 7 (pour le cas  $\nu = 1$  et  $b = 0.75$ ), pour une plage de  $I_1$  allant au delà de  $I_{cn}$ .

### 3.4 Comparaison avec d'autres critères

Les figures précédentes illustrent le fait que le critère proposé prend des formes diverses selon la valeur des paramètres utilisés. On peut aussi montrer que le critère  $\text{MSDP}_u$  reproduit de près les caractéristiques des surfaces associées à différents autres critères mentionnés plus hauts. Des comparaisons entre le critère  $\text{MSDP}_u$  et des critères utilisés pour les matériaux poreux sont montrées à la figure 8. En ce sens, on peut considérer que le critère proposé ici constitue une version générale des critères de plasticité et de rupture développés au fil des ans, pour les matériaux ductiles et fragiles, de porosité variable. Quelques applications particulières du critère sont montrées dans la section qui suit.

Figure 2. Représentation schématique du critère MSDP<sub>u</sub> pour des matériaux peu poreux , avec  $a_{3n} = 0$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\nu_1 = 0$  ( $\nu = 1$ ).

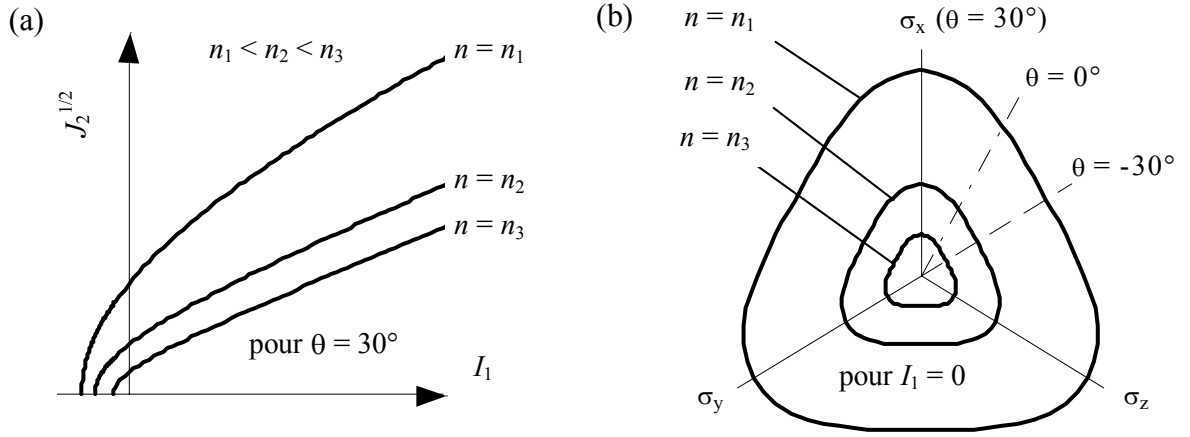


Figure 3. Illustration de l'évolution de la surface de MSDP<sub>u</sub> dans le plan  $\pi$  lorsque  $I_1$  augmente;  $\Gamma = 1$ ,  $b = 0.75$ ,  $\nu_1 \neq 0$  ( $\nu$  varie avec  $I_1$ ).

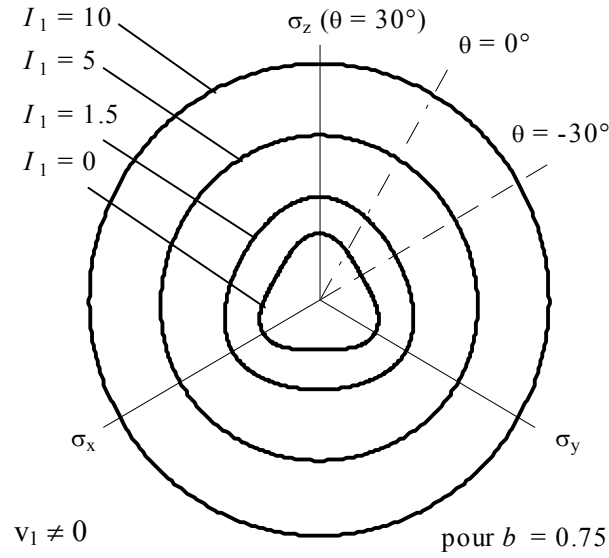




Figure 4. Représentation schématique du critère MSDP<sub>u</sub> pour des matériaux poreux avec  $a_{3n} \neq 0$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\nu_1 = 0$  ( $\nu = 1$ ),  $b = 0.75$ .

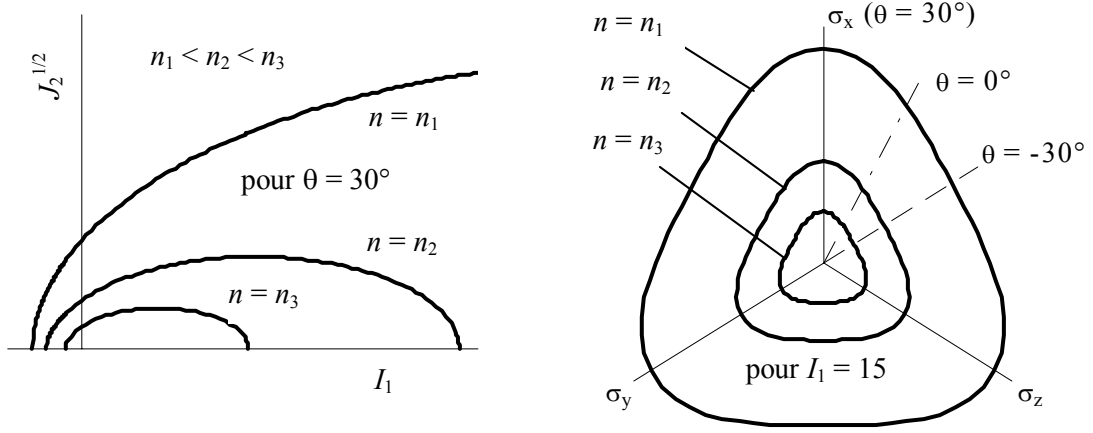


Figure 5. Représentation schématique du critère MSDP<sub>u</sub> pour des matériaux poreux avec  $a_{3n} \neq 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\nu_1 = 0$  ( $\nu = 1$ ).

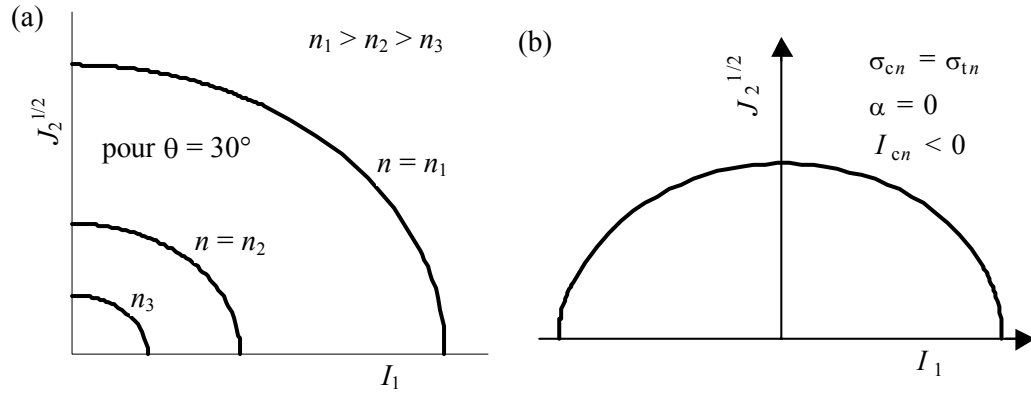


Figure 6. Influence de la porosité  $n$  (a), de l'angle  $\alpha$  (b), de la résistance en compression uniaxiale  $\sigma_{cn}$  (c), de la résistance en traction uniaxiale  $\sigma_{tn}$  (d), de  $I_{cn}$  (e), et de  $a_{3n}$  (f) sur l'allure du critère MSDP<sub>u</sub> dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$ .

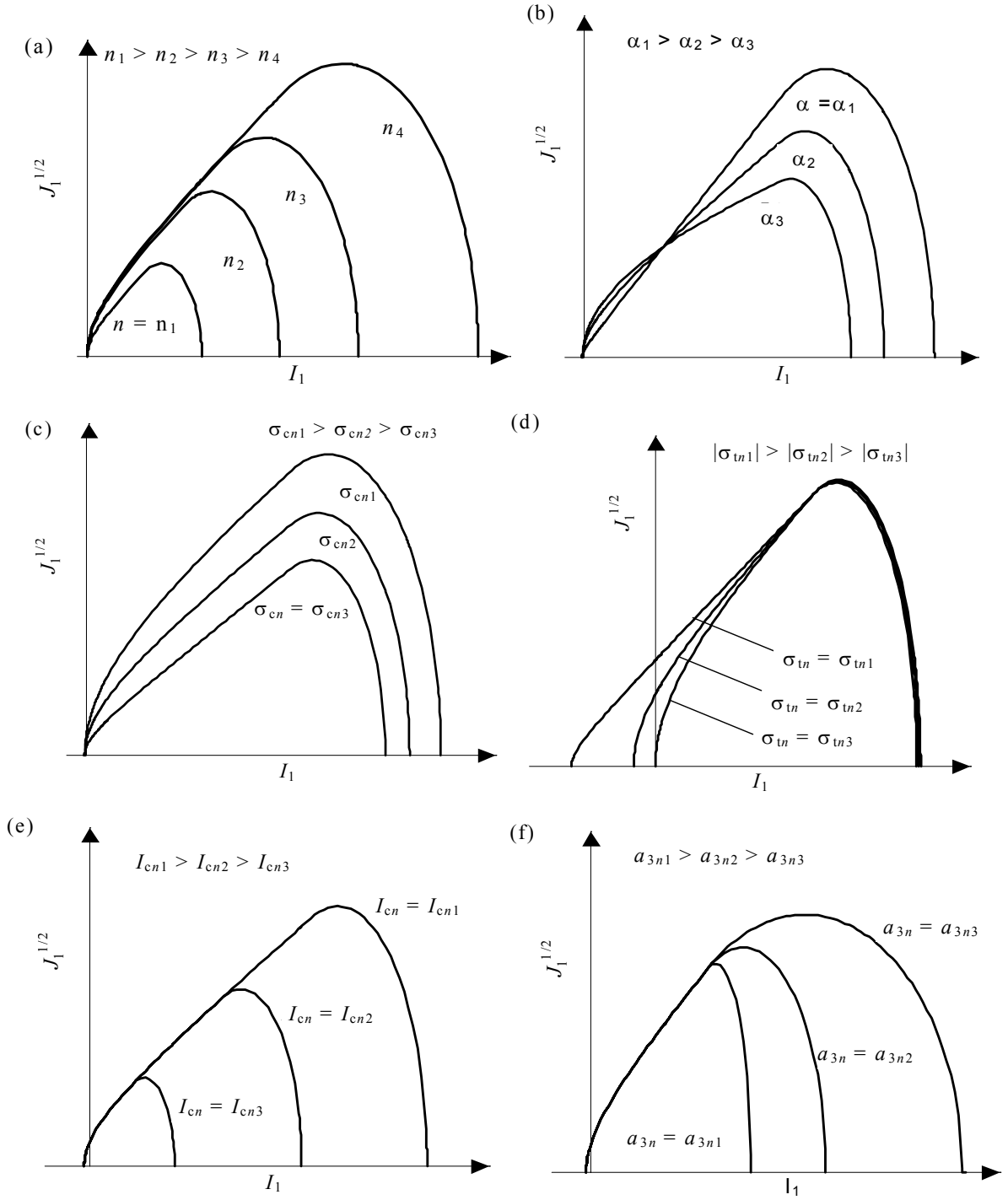


Figure 7. Représentation schématique du critère  $\text{MSDP}_u$  dans l'espace tridimensionnel des contraintes.

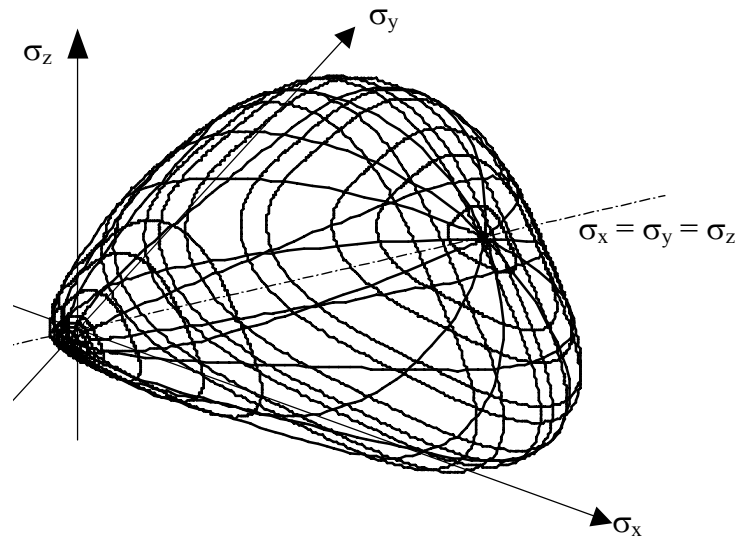
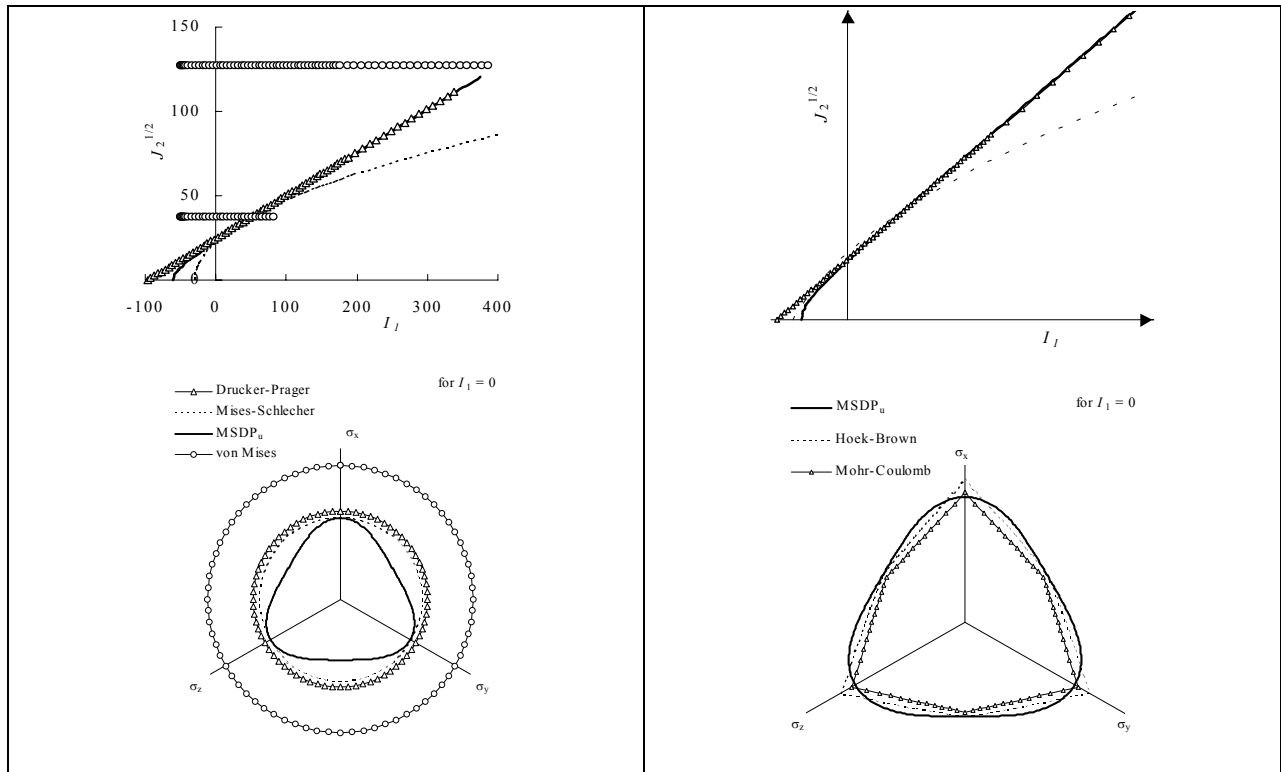
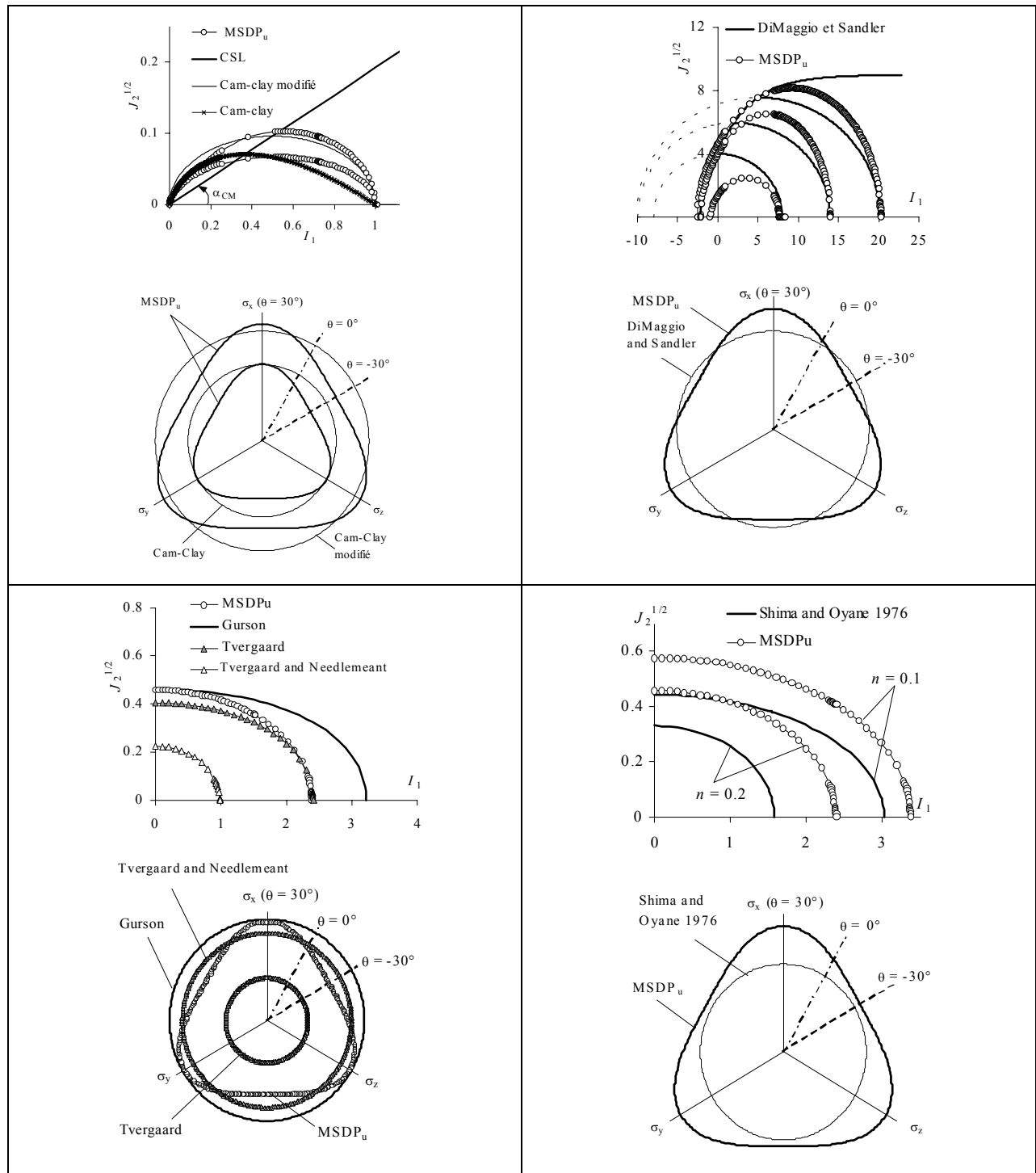
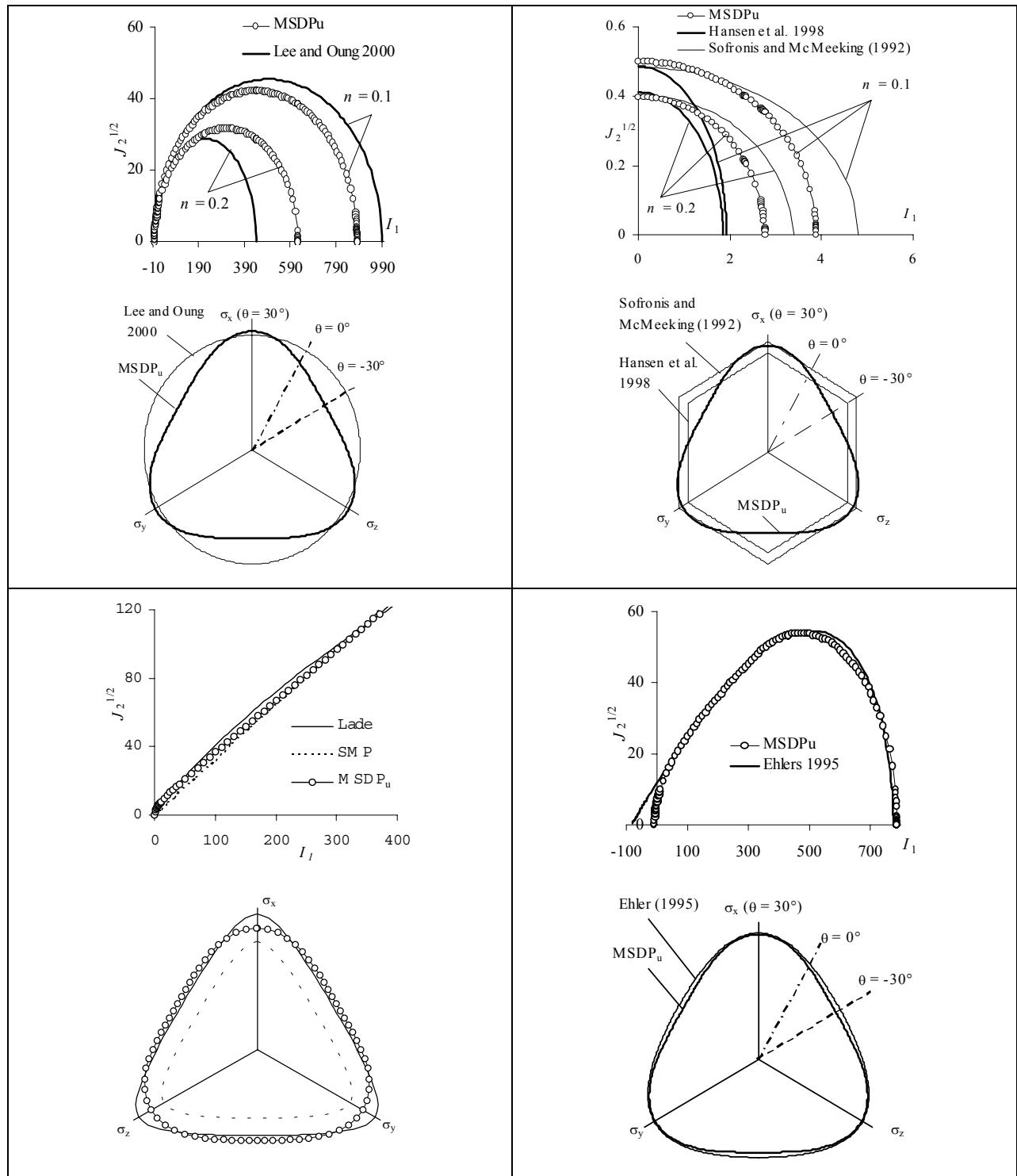
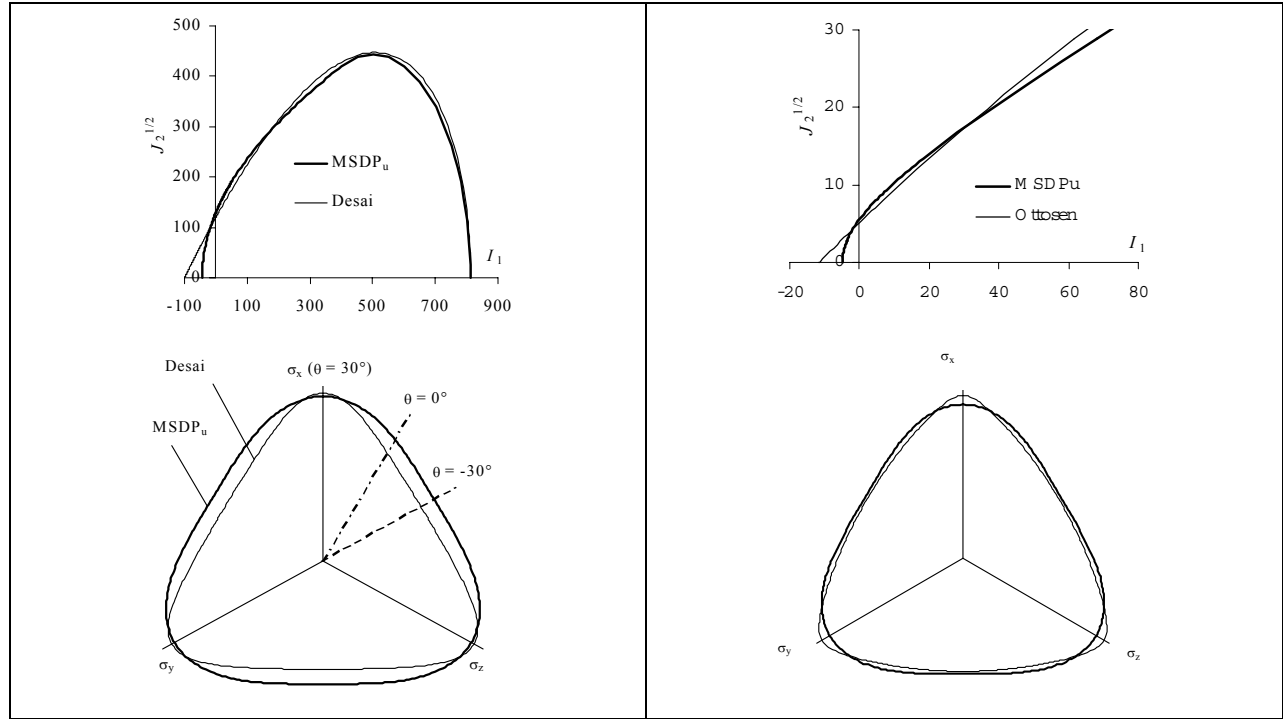


Figure 8. Comparaison graphique entre le critère  $\text{MSDP}_u$  et différents critères existants (montrée pour des paramètres normalisés).









#### 4. APPLICATION DU CRITÈRE MSDP<sub>u</sub>

##### 4.1 Identification des paramètres du critère MSDP<sub>u</sub>

Comme tous les autres critères, le critère MSDP<sub>u</sub> contient aussi des paramètres qui doivent être déterminés expérimentalement. Une méthode générale d'optimisation pour l'obtention des paramètres a été présentée par Li et al. (2000). Li et Aubertin (2003) ont aussi discuté de la méthode pour définir les valeurs de  $\sigma_{un}$  (équ.10) utilisées dans les deux paramètres  $a_{1n}$  et  $a_{2n}$ .

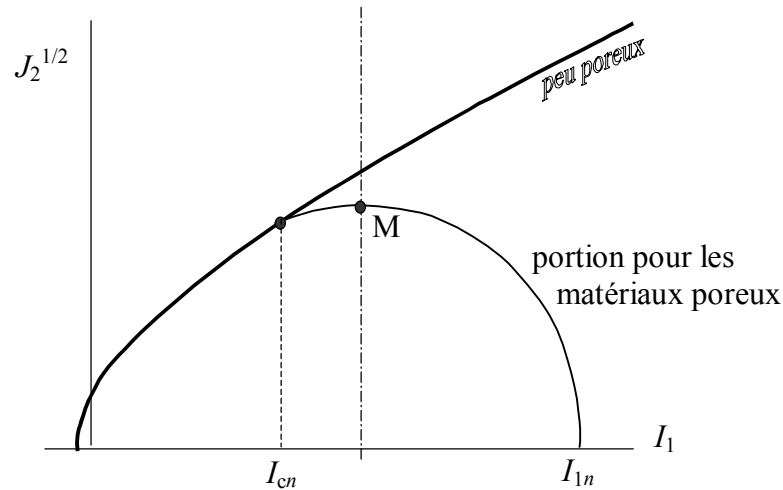
Comme on le voit à la figure 9, la surface du critère commence à dévier de la surface définie pour les matériaux peu poreux à partir de  $I_1 = I_{cn}$ . La surface se referme à  $I_{1n}$  lorsque le déviateur est nul. Les points  $I_{cn}$  et  $I_{1n}$  sont interliés entre eux. Le paramètre  $a_{3n}$  est aussi utilisé pour la surface (de rupture, d'écoulement) en fonction de la porosité  $n$  lorsque le matériau est soumis à une pression hydrostatique (voir Fig. 6f). Pour une valeur de  $I_{1n}$  donnée pour un matériau de porosité  $n$  (voir Fig. 9), on obtient à partir des équations (2) – (8):

$$a_{3n} = \frac{\alpha^2 (I_{1n}^2 - 2a_{1n}I_{1n}) + a_{2n}^2}{(I_{1n} - I_{cn})^2} \quad (14)$$

Le paramètre  $I_{1n}$  peut être obtenu par des essais en compression hydrostatique ou déduit d'essais en compression triaxiale conventionnelle, CTC ( $\theta = 30^\circ$ ) ou en extension triaxiale réduite, RTE ( $\theta = 30^\circ$ ) (au-delà de  $I_{cn}$ ). Ces paramètres peuvent aussi être déduits par des essais oedométriques instrumentés.

Pour définir la relation entre la porosité et la valeur de  $I_{1n}$  et  $I_{cn}$ , on peut s'inspirer de l'équation (10), proposer une relation alternative, ou encore se baser sur ce qui se fait en géotechnique. Par exemple, en mécanique des sols, il existe une relation exponentielle entre la variation de l'indice des vides  $e$  et la contrainte effective normalisée (par la pression de préconsolidation). En mécanique des roches, une loi exponentielle et une fonction de puissance sont aussi utilisés (e.g., Li et Aubertin 2003).

Figure 9. Schématisation du critère MSDP<sub>u</sub> pour les matériaux poreux (avec "cap") et peu poreux; l'effet de la porosité sur la surface débute à  $I_{cn}$ ; la surface se referme sur l'axe  $I_1$  à  $I_{1n}$ ; la valeur de  $J_2^{1/2}$  maximale correspond au point M.



Physiquement,  $I_{1n}$  et  $I_{cn}$  devraient tendre vers l'infini lorsque la porosité  $n$  tend vers 0; c'est ce qui explique qu'on ne voit pas la partie fermée de la surface de rupture ou d'écoulement dans le plan  $I_1$ - $J_2^{1/2}$  pour des matériaux de faible porosité (tel des roches dures et certains bétons). De plus, lorsque la porosité  $n$  se tend vers une valeur critique  $n_c$  ( $< 1$ ), tel qu'il est défini dans l'équation (10), le matériau perd sa résistance uniaxiale si bien que  $I_{1n}$  et  $I_{cn}$  tendront aussi vers leur valeur minimale. À

partir de ces considérations, et de l'analyse des résultats disponibles, les auteurs ont considéré les expressions suivantes pour  $I_{1n}$ :

$$I_{1n} = \left\{ I'_{1n} \left( 1 - \sin^{x_1} \left( \frac{\pi}{2} \frac{n}{n_c} \right) \right) + \langle I'_{1n} \rangle \cos^{x_2} \left( \frac{\pi}{2} \frac{n}{n_c} \right) \right\} \left\{ 1 - \frac{\langle I'_{1n} \rangle}{2I'_{1n}} \right\} \quad (10')$$

$$I_{1n} = I'_{1n} \exp(-q n) \quad (15)$$

$$I_{1n} = I'_{1n} \sinh \left[ \left( \frac{n_c}{n} - 1 \right)^{p_1} \right] \quad (16)$$

où  $I'_{1n}$ ,  $q$ ,  $p_1$  sont des paramètres du matériau.

La figure 10 montre la description du seuil  $I_{1n}$  pour un plâtre sous un fort chargement hydrostatique. On voit que les équations considérées ici décrivent bien les résultats expérimentaux. Dans la suite, nous retiendrons l'équation (16), en raison de sa versatilité et de sa simplicité relative.

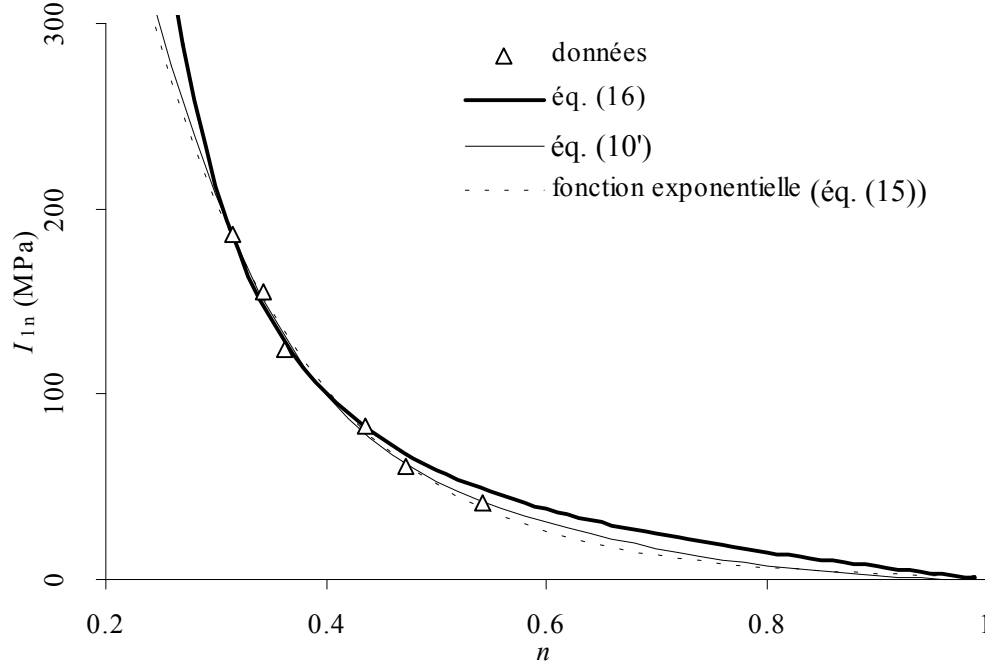
Pour  $I_{cn}$ , les mêmes fonctions peuvent être employées. La relation générale deviendrait:

$$I_{cn} = I'_{cn} \sinh \left[ \left( \frac{n_c}{n} - 1 \right)^{p_2} \right] \quad (17)$$

Dans cette équation,  $I'_{cn}$ ,  $p_2$  sont des paramètres du matériau. Comme il y a très peu de données disponibles pour définir expérimentalement le paramètre  $I_{cn}$ , il sera postulé que les paramètres  $p_1$  et  $p_2$  peuvent prendre la même valeur, soit  $p_1 = p_2 = p$ . Bien entendu, la validité de cette hypothèse simplificatrice doit être confirmée à partir de données expérimentales.



Figure 10.  $I_{1n}$  avec la porosité du plâtre, essais sur des éprouvettes cylindriques soumis à une compression hydrostatique (rapport eau/plâtre = 70%) (données tirées de Nguyen 1972);  $I_{1n}' = 1052.9$  MPa,  $n_{Cc} = 100\%$ ,  $x_1 = 0.2847$  et  $x_2 = 14.225$  avec l'équation (10');  $I_{1n}' = 1604.5$  MPa et  $q = 6.876$  avec l'équation (15);  $I_{1n}' = 50.6$  MPa,  $n_{Cc} = 100\%$ , et  $p_1 = 0.898$  avec l'équation (16).



## 4.2 Représentations graphiques de résultats expérimentaux

Il est montré dans ce qui suit divers cas où le critère  $MSDP_u$  peut être appliqué pour décrire l'une ou l'autre des surfaces caractéristiques des matériaux, à diverses porosités.

Le cas des roches et autres matériaux fragiles peu poreux a déjà été bien documenté au préalable (Aubertin et Simon 1996, 1997, 1998; Aubertin et al. 1999, 2000). Dans ce cas, le critère peut être utilisé pour décrire la condition de rupture (voir Fig. 11a) et l'initiation de l'endommagement (amorce de propagation de fissures- voir Fig. 11b), sans portion refermée sur l'axe  $I_1$  positif (car  $I_{cn}$  est très grand).

Les figures suivantes montrent le critère appliqué (avec  $b = 0.75$ , pour  $I_1 < I_{cn}$ ) à la description de la résistance d'une roche broyée qui montre un comportement typique de sols granulaires (Fig. 12). On montre aussi le cas d'une poudre métallique (Fig. 13), d'une argile (Fig. 14), et de sables (Figs. 15 et 16). Dans tous les cas, le critère représente bien les données expérimentales.

Les figures 17 à 20 montrent la description (avec  $b = 0.75$ ) pour  $I_1 > I_{cn}$  de la résistance de roches (Fig. 17), de plâtres (Fig. 18), d'argiles (Fig. 19), et de sols résiduels (Fig. 20). Dans ces cas, on constate que pour  $I_1 > I_{cn}$ , la surface se referme sur l'axe  $I_1$  en compression.

Les figures 21 à 23 montrent comment le critère peut être utilisé pour décrire la limite élastique et la condition de rupture de divers matériaux, soit des roches (Fig. 21), un sol résiduel aggloméré (Fig. 22), et un remblai en pâte cimenté (Fig. 23).

Enfin, les figures 24 et 25 montrent l'application du critère  $MSDP_u$  pour décrire la résistance d'un sable soumis à différentes géométries de chargement.

Ces quelques illustrations démontrent la capacité du critère  $MSDP_u$  à bien décrire la résistance à la rupture et la limite élastique d'une grande variété de matériau poreux. D'autres exemples d'application ont été présentés par les auteurs dans les publications citées plus haut.

Figure 11a.  $MSDP_u$  appliqué à la description de la rupture d'un grès, avec  $\sigma_{cn} = 85$  MPa,  $\sigma_m = 2$  MPa,  $\phi \approx 28^\circ$ ,  $b = 0.75$ ,  $I_{cn} \gg$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\nu_1 = 0$  (données tirées de Takahashi et Koide 1989).

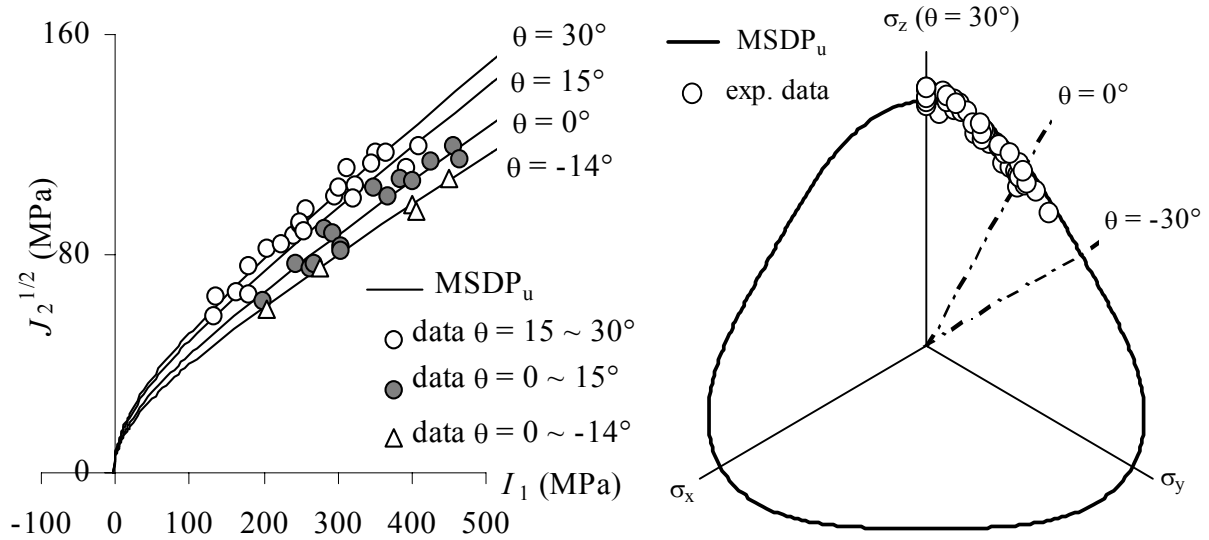


Figure 11b. Application du critère  $\text{MSDP}_u$  pour décrire le seuil d'endommagement en CTC du sel gemme (données tirées de Thorel 1994);  $b = 0.75$ ,  $\phi = 0^\circ$ ,  $\tilde{\sigma}_c = 37 \text{ MPa}$ ,  $\tilde{\sigma}_t = 3 \text{ MPa}$ .

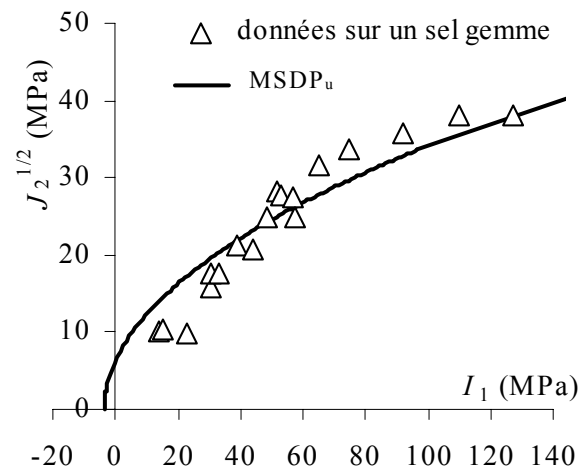


Figure 12. Description de la résistance de rupture en CTC du granite de Westerly broyé avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Zoback et Byerlee 1976) avec  $b = 0.75$ ,  $\phi = 33.8^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 3.1 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 0 \text{ MPa}$ .

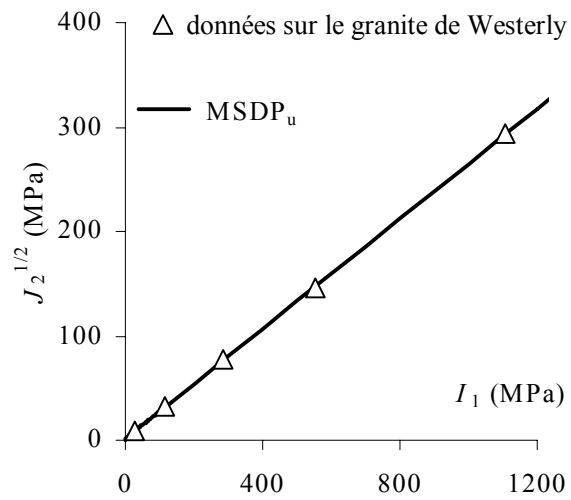


Figure 13. Description de la résistance à la rupture en CTC de poudres d'aluminium avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Cristescu et al. 1996): a) aluminium A10 avec  $\phi = 35.5^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 27.4 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{un} = 0 \text{ kPa}$ ; b) aluminium A16-SG, avec  $\phi = 30^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 50 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{un} = 0 \text{ kPa}$ .

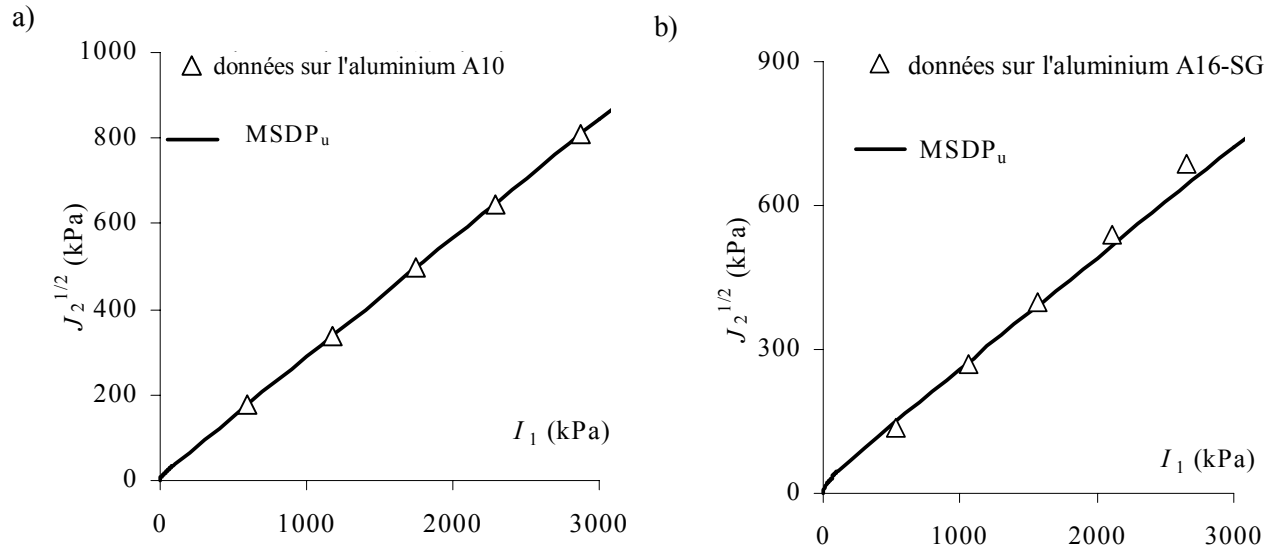


Figure 14. Description de la résistance à la rupture de l'argile raide de Todi avec le critère  $\text{MSDP}_u$  pour des essais en CTC (données tirées de Rampello 1991): a) pour des échantillons gonflés ("swollen") avec  $\phi = 51.5^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 0.093 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{un} = 0 \text{ MPa}$ ; b) pour des échantillons non remaniés perturbés avec  $\phi = 61.2^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 0.54 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{un} = 0.037 \text{ MPa}$ .

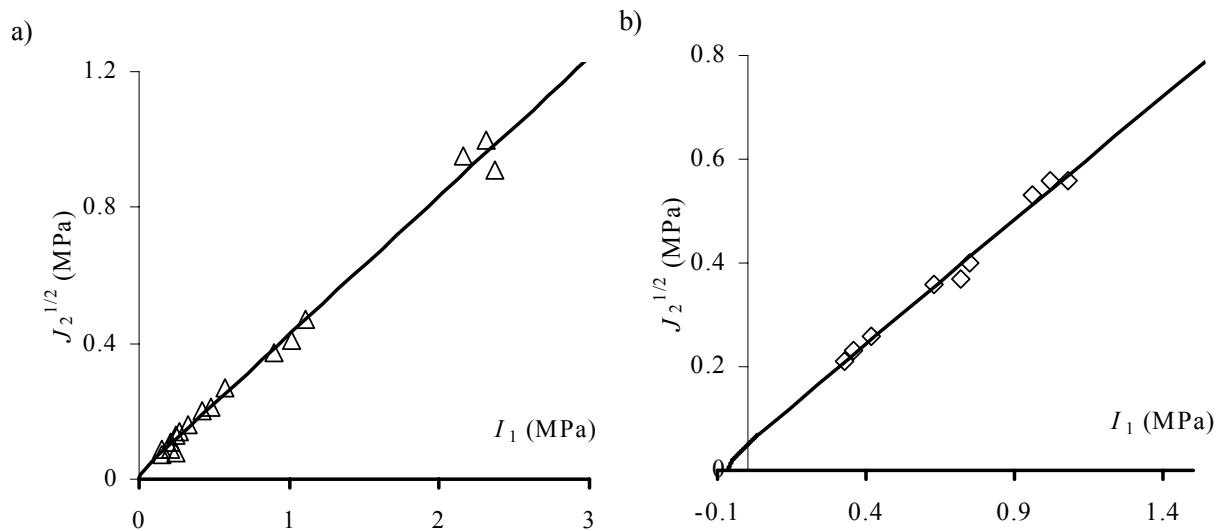


Figure 15. Description de la résistance à la rupture en CTC du sable d'Ottawa avec le critère  $\text{MSDP}_u$ , avec un chargement au delà de  $I_{cn}$  (données tirée de Wan et Guo 2001);  $b = 0.75$ ,  $\phi = 26.6^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 1.9 \text{ MPa}$  (estimé),  $\sigma_{vn} = 0 \text{ MPa}$ ,  $a_{3n} = 0.0482$  (estimé), et  $I_{cn} = 1156.6 \text{ MPa}$  (estimé).

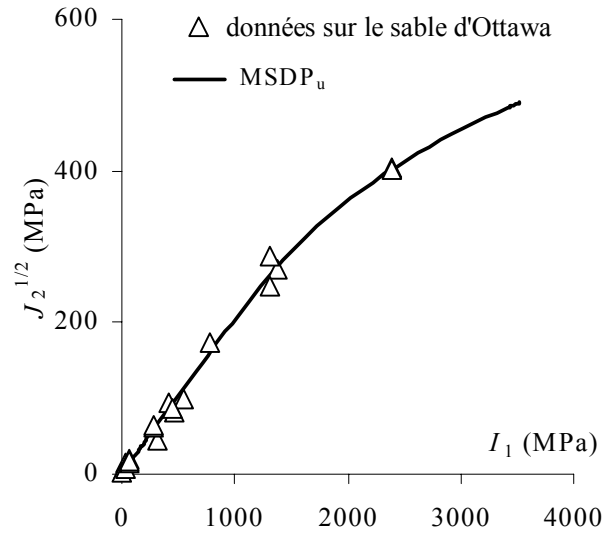


Figure 16. Description de la résistance à la rupture en CTC du sable du fleuve Sacramento avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Wan et Guo 1998): a) pour des échantillons denses avec  $\phi = 35.8^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 196.67 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{vn} = 0 \text{ kPa}$ ,  $I_{cn} > 12000 \text{ kPa}$ ; b) pour des échantillons plus lâches avec  $\phi = 29.1^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 43.67 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{vn} = 0 \text{ kPa}$ .

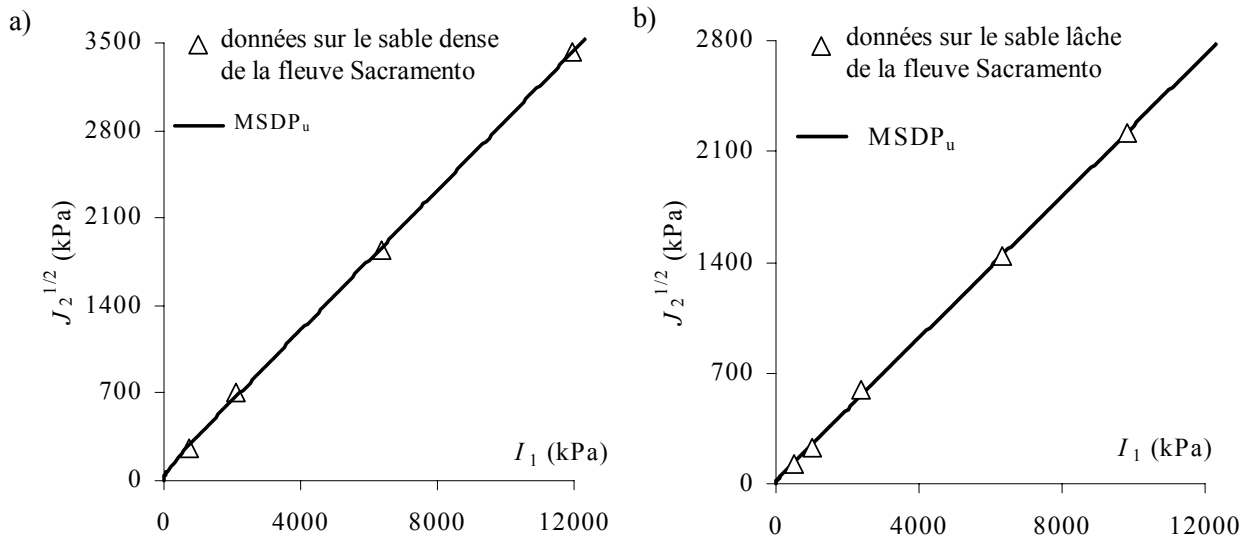


Figure 17a. Description de la résistance à la rupture en CTC du calcaire d'Indiana avec le critère  $MSDP_u$  (données tirée de Schwartz 1964) avec  $\phi = 35^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 38$  MPa (mesuré),  $\sigma_{vn} = 3$  MPa (estimé),  $a_{3n} = 0.105$  (estimé), et  $I_{cn} = 40$  MPa (estimé).

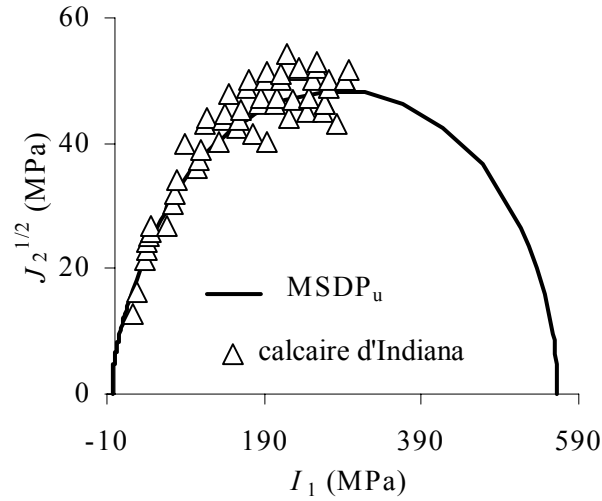


Figure 17b. Description de la résistance à la rupture en CTC de shale Weald avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Madsen et al. 1989);  $\phi = 38^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 5$  MPa (estimé),  $\sigma_{vn} = 0.1$  MPa (estimé),  $a_{3n} = 0.21$  (estimé), et  $I_{cn} = 45$  MPa (estimé).

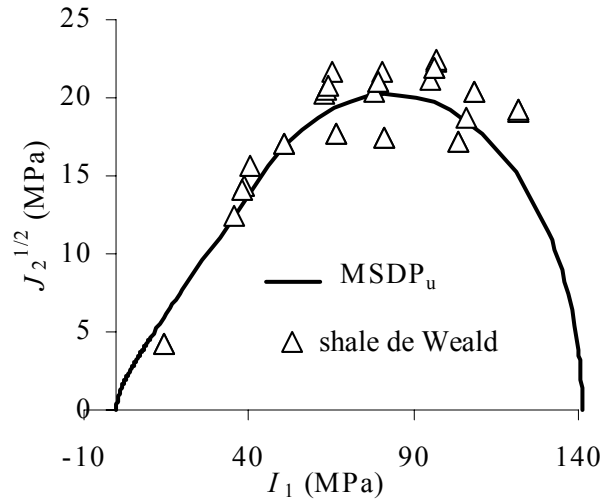


Figure 17c. Description de la résistance du calcaire de Trenton normalement consolidé à 10 MPa avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Nguyen 1972);  $\phi = 33^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 10$  MPa (estimé),  $\sigma_{vn} = 0.5$  MPa (estimé),  $a_{3n} = 0.134$  (estimé), et  $I_{cn} = 18$  MPa (estimé).

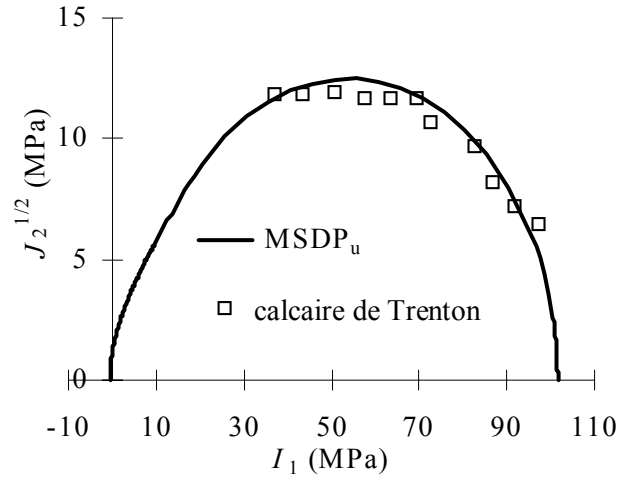


Figure 17d. Description de la résistance en CTC d'un craie avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Elliott et Brown 1985);  $\phi = 28^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 8$  MPa (estimé),  $\sigma_{vn} = 0.1$  MPa (estimé),  $a_{3n} = 0.125$  (estimé), et  $I_{cn} = 11$  MPa (estimé).

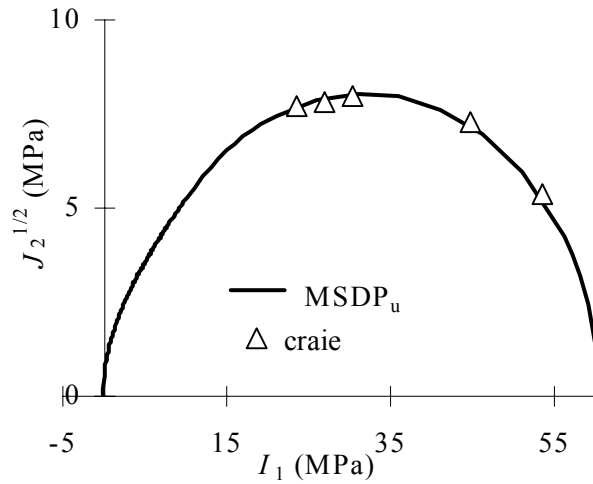


Figure 17e. Description de la résistance en CTC d'un calcaire avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Cheatham 1967);  $I_{cn} = 0$  MPa,  $\sigma_{cn} = 20$  MPa,  $\sigma_{tn} = 0.5$  MPa,  $\phi = 28^\circ$ ,  $a_{3n} = 0.102$  pour le calcaire pré-consolidé à 34.5 MPa et  $I_{cn} = 0$  MPa,  $\sigma_{cn} = 12$  MPa,  $\sigma_{tn} = 0.5$  MPa,  $\phi = 28^\circ$ ,  $a_{3n} = 0.09$  pour le calcaire intact (non consolidé).

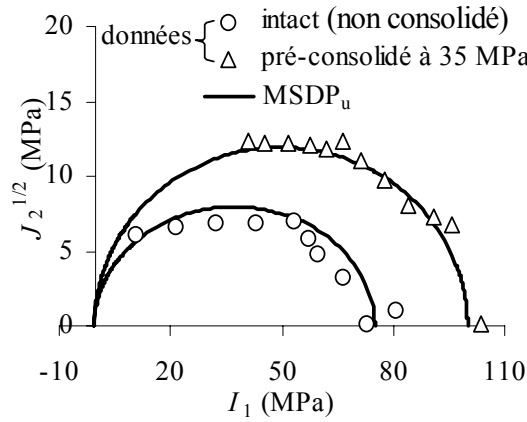


Figure 18. Description de la résistance en CTC d'échantillons de plâtres (rapport eau/plâtre = 50%) avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Nguyen 1972); description du plâtre intact ( $n = 44.3\%$ ) avec  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 13.6$  MPa (mesuré),  $\sigma_{tn} = 2.6$  MPa (mesuré),  $I_{1n} = 79.6$  MPa (mesuré), et  $I_{cn} = 8$  MPa (estimé); description pour du plâtre préconsolidé à 51.7 MPa ( $n = 32.25\%$ ) avec  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 13.3$  MPa (mesuré),  $\sigma_{tn} = 2$  MPa (estimé),  $I_{1n} = 154.9$  MPa (mesuré), et  $I_{cn} = 15$  MPa (calculé).

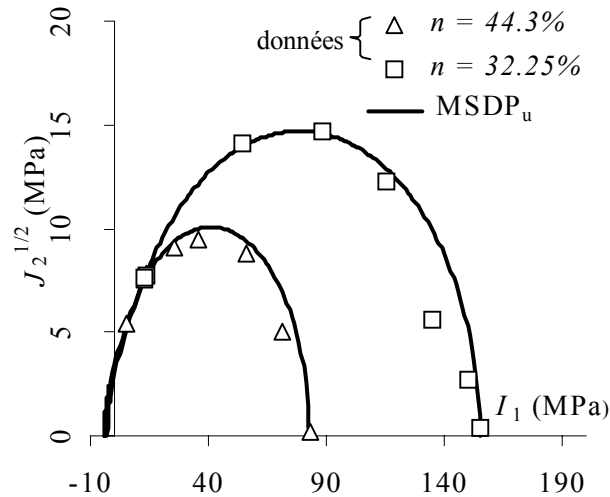




Figure 19a. Description de la résistance en CTC de l'argile de Matagami avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Nguyen 1972);  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 48$  kPa (mesuré),  $\sigma_{vn} = 1$  kPa (estimé),  $a_{3n} = 0.9$  (estimé), et  $I_{cn} = 180$  kPa (estimé).

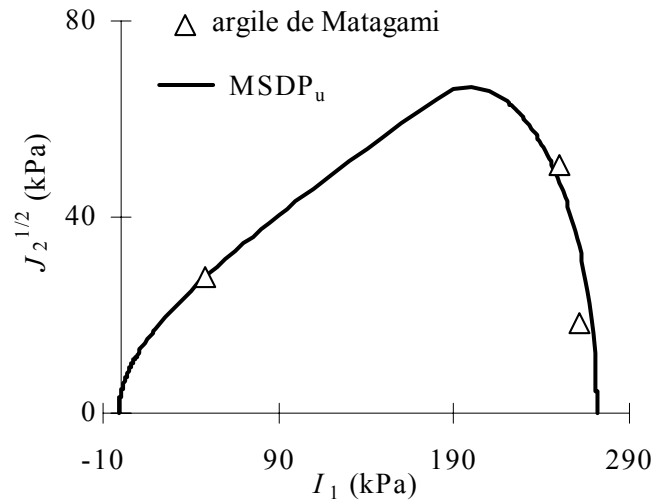


Figure 19b. Description de la résistance en CTC de l'argile de Leda avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Nguyen 1972);  $\phi = 10^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 107.8$  kPa (mesuré),  $\sigma_{vn} = 15$  kPa (estimé),  $a_{3n} = 0.9$  (estimé), et  $I_{cn} = 530$  kPa (estimé).

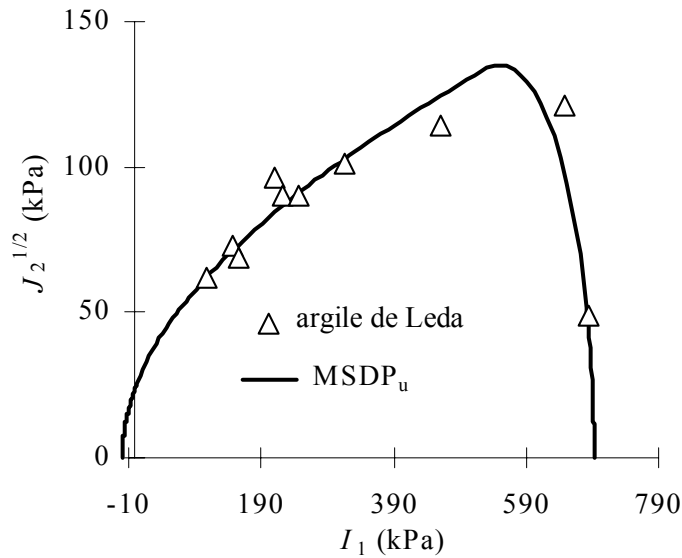


Figure 20a. Description de la résistance en CTC d'un sol résiduel basaltique avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Maccarini 1987);  $\phi = 22.7^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 914.1$  kPa,  $\sigma_{tn} = 127.4$  kPa,  $a_{3n} = 0.10$ , et  $I_{cn} = 13.6$  kPa.

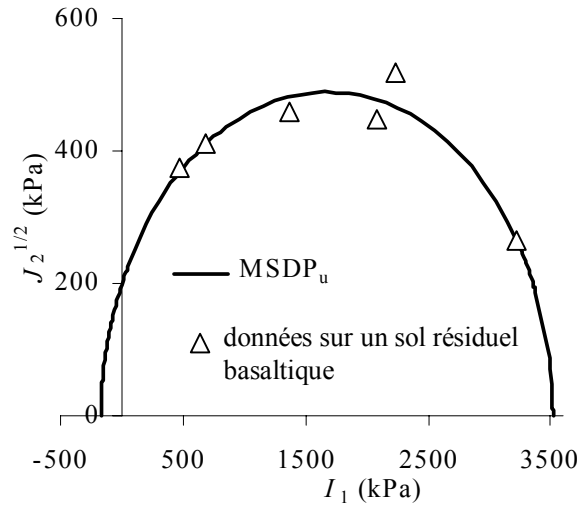


Figure 20b. Description de la résistance en CTC d'un sol résiduel (riche en gneiss) avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Sandroni 1981);  $\phi = 24.5^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 119.9$  kPa,  $\sigma_{tn} = 0.9$  kPa,  $a_{3n} = 0.09$ , et  $I_{cn} = 45.4$  kPa.

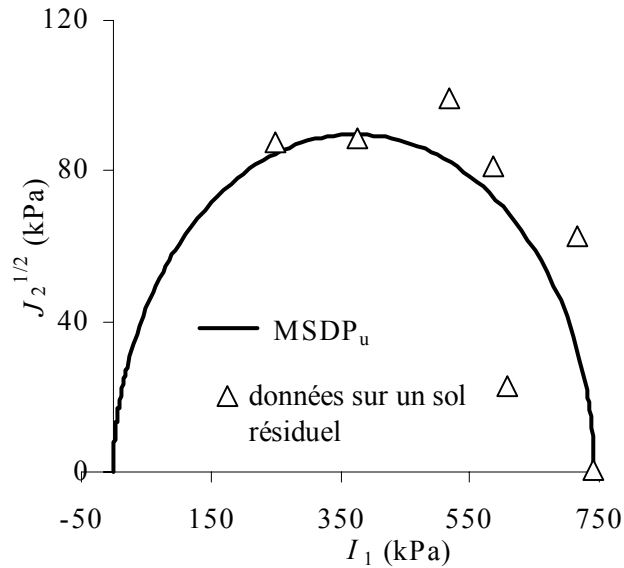


Figure 21a. Description de la rupture et de la limite élastique du grès de Kayenta en CTC avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Wong et al. 1992);  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 30$  MPa (mesuré),  $\sigma_{vn} = 2$  MPa (estimé),  $a_{3n} = 0.115$  (estimé), et  $I_{cn} = 250$  MPa (estimé).

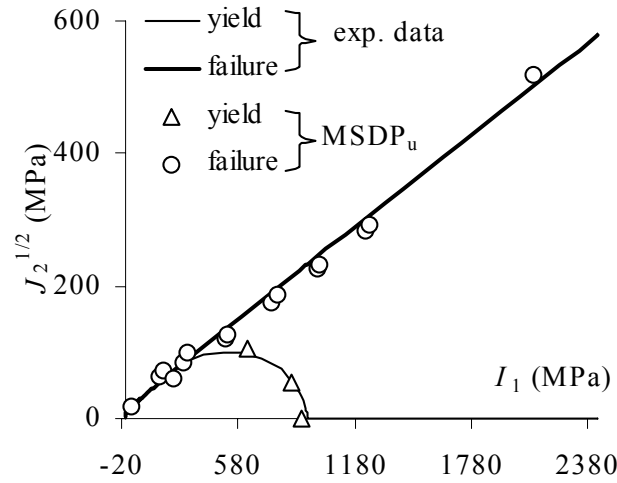


Figure 21b. Description de la rupture et de la limite élastique d'échantillons de roche de Bath ("Bath stone") avec le critère  $MSDP_u$  en CTC (données tirées de Elliott et Brown 1985);  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 15$  MPa (mesuré),  $\sigma_{vn} = 1$  MPa (estimé),  $a_{3n} = 0.095$  (estimé), et  $I_{cn} = 0$  MPa (estimé).

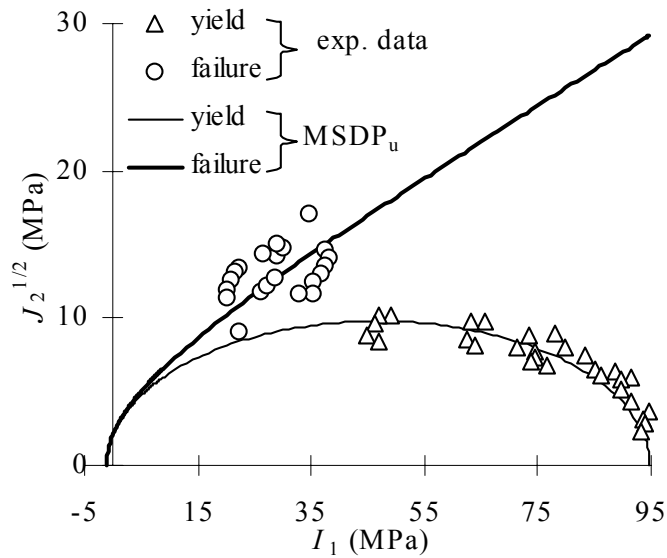


Figure 21c. Description de la rupture et de la limite élastique d'un tuf (en CTC) avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Pellegrino 1970);  $\phi = 20^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 3.8$  MPa (mesuré),  $\sigma_{tn} = 0.5$  MPa (estimé),  $a_{3n} = 0.115$  (estimé), et  $I_{cn} = 6.5$  MPa (estimé).

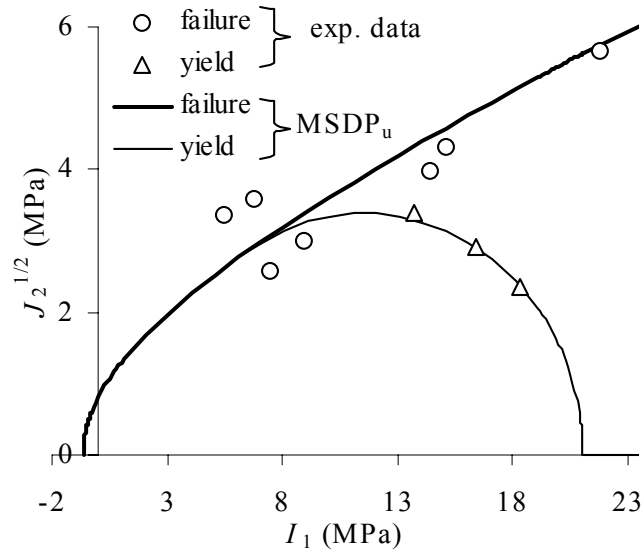


Figure 21d. Description de la rupture et de la limite élastique du craie d'Epernay (en CTC) avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Nguyen 1972);  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 8$  MPa (mesuré),  $\sigma_{tn} = 0.1$  MPa (estimé),  $a_{3n} = 0.55$  (estimé), et  $I_{cn} = 30$  MPa (estimé).

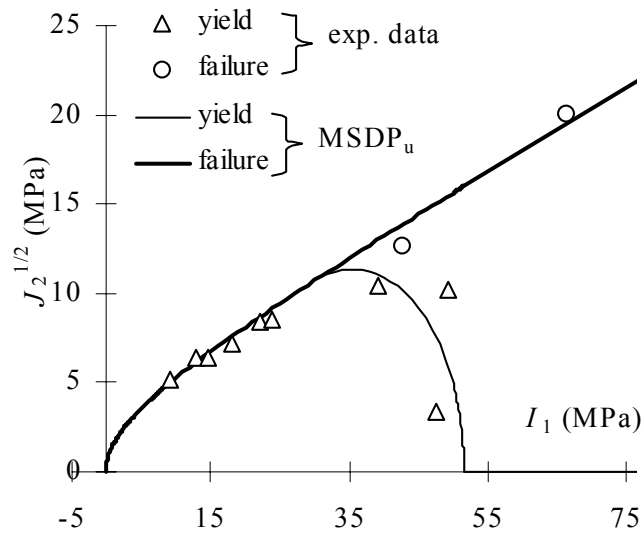


Figure 22. Description de la rupture et de la limite élastique d'un sol résiduel (aggloméré volcanique) en CTC avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Uriel et Serrano 1973);  $\phi = 25^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 300$  kPa (mesuré),  $\sigma_{tn} = 5$  kPa (estimé),  $a_{3n} = 0.063$  (estimé), et  $I_{cn} = 100$  kPa (estimé).

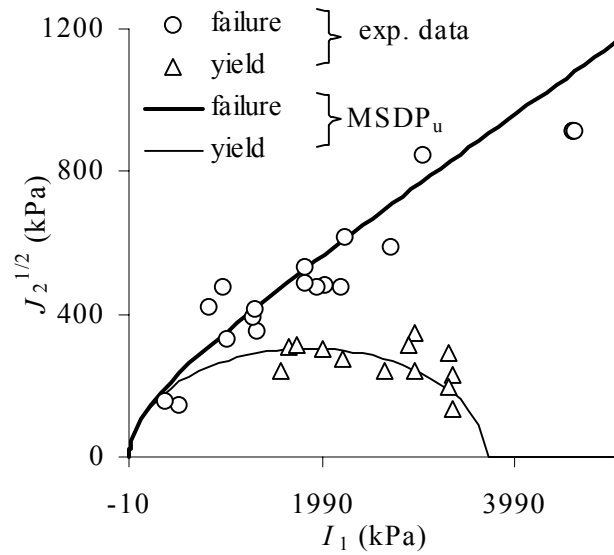


Figure 23. Description de la rupture et de la limite élastique d'un remblai en pâte en CTC avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Ouellet et Servant 2000); 6.5% ciment testé à 28 jours avec  $\phi = 23^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 580$  kPa,  $\sigma_{tn} = 50$  kPa,  $a_{3n} = 0.14$ , et  $I_{cn} = 100$  kPa; 6.5% ciment à 3 jours avec  $\phi = 32^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 200$  kPa,  $\sigma_{tn} = 0.5$  kPa,  $a_{3n} = 0.14$ , et  $I_{cn} = 100$  kPa; 3% ciment testé à 15 jours avec  $\phi = 37^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 10$  kPa,  $\sigma_{tn} = 0$  kPa,  $a_{3n} = 0.14$ , et  $I_{cn} = 150$  kPa.

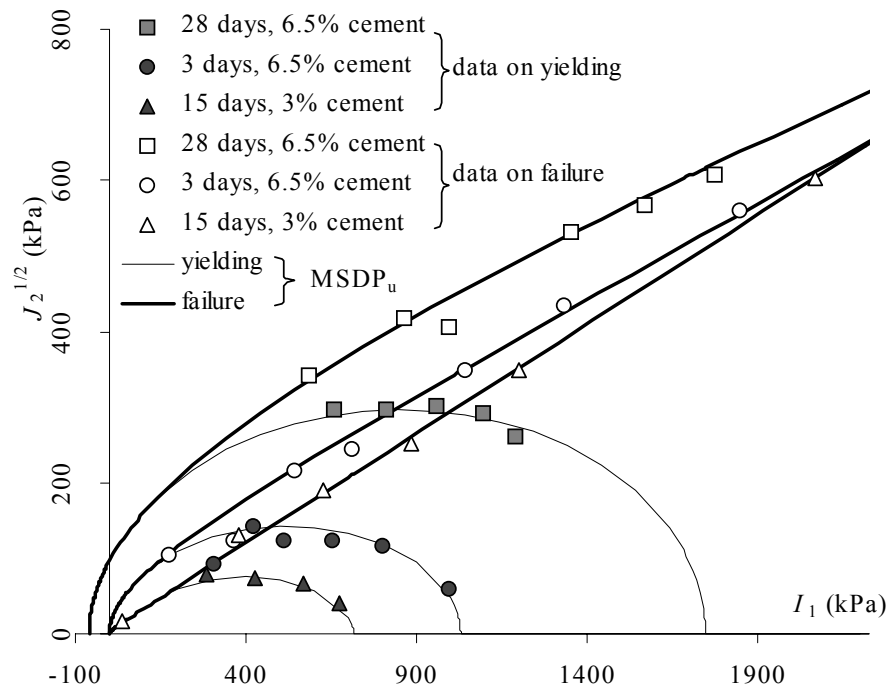


Figure 24. Description de la résistance d'un sable lâche de Monterey avec le critère  $\text{MSDP}_u$  ( $n = 43.8\%$ );  $\sigma_{cn} = 3 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{vn} = 0$ ,  $\phi \approx 38^\circ$ ,  $b = 0.75$ ,  $I_{cn} \gg$  (ou  $a_{3n} = 0$ ),  $\Gamma = 1$ ,  $\nu_1 = 0$  (données tirées de Lade et Duncan 1973).

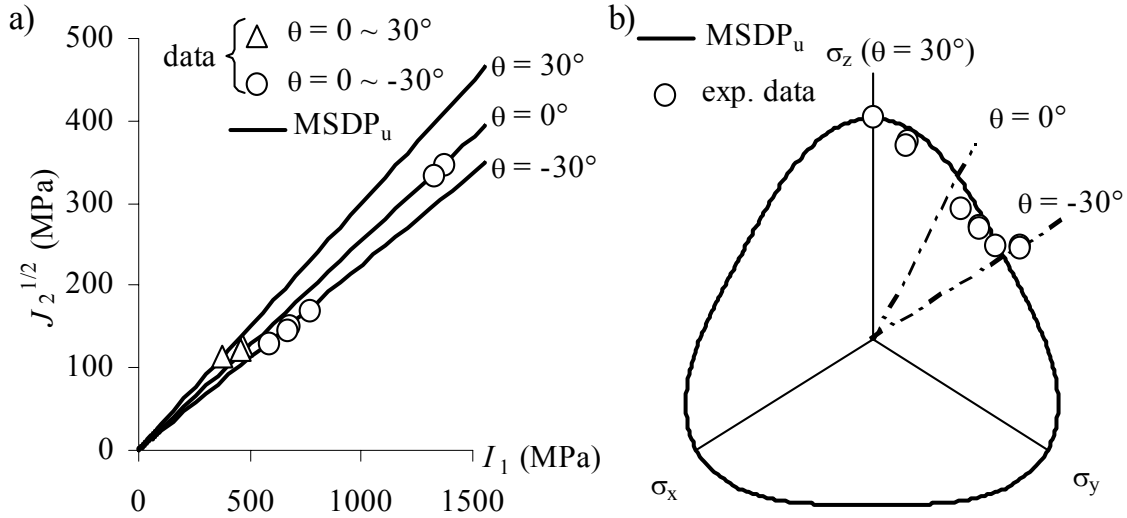
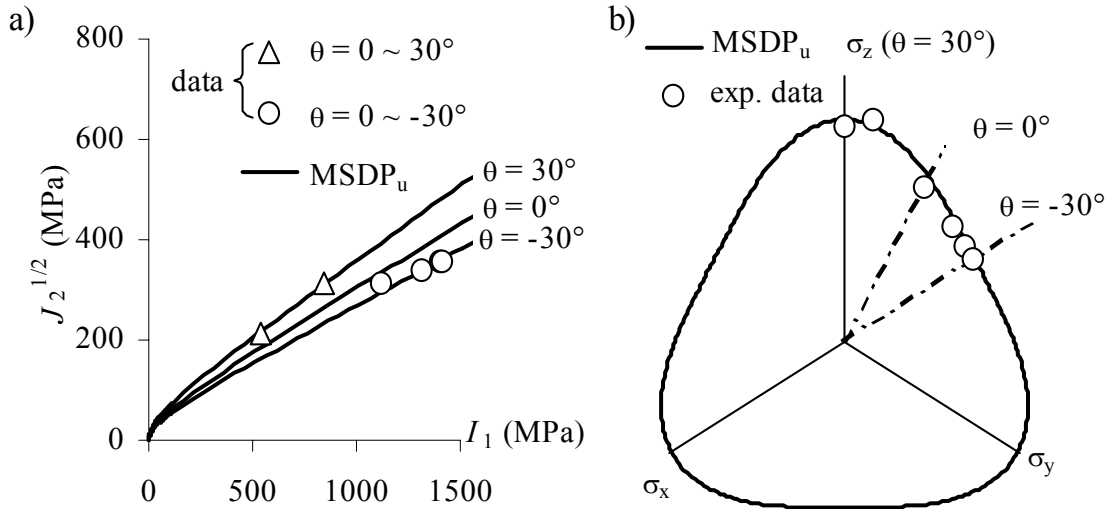


Figure 25. Description de la résistance d'un sable dense de Monterey avec le critère  $\text{MSDP}_u$  ( $n = 36.3\%$ );  $\sigma_{cn} = 160 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{vn} = 0$ ,  $\phi \approx 38^\circ$ ,  $b = 0.75$ ,  $I_{cn} \gg$  (ou  $a_{3n} = 0$ ),  $\Gamma = 1$ ,  $\nu_1 = 0$  (données tirées de Lade et Duncan 1973).



### 4.3 Description et prédiction avec le critère $\text{MSDP}_u$

À la section précédente, le critère  $\text{MSDP}_u$  a été utilisé afin de décrire les conditions de rupture ou limite élastique des matériaux. De telles applications consistent typiquement à identifier les paramètres du critère en minimisant les erreurs entre les données expérimentales disponibles et les

résultats calculés (Li et al. 2000). Une telle approche descriptive est relativement facile à utiliser lorsque la formulation est adéquatement posée puisqu'il s'agit d'un problème de régression. C'est le cas avec le critère  $MSDP_u$ , dont les paramètres ont une signification physique claire.

Dans certains cas, il peut être intéressant de pouvoir prédire la résistance (ou son évolution) en fonction des paramètres d'influence. Pour cela, on doit alors obtenir les paramètres de base nécessaires, requis pour une application descriptive. Certains de ces paramètres sont ensuite utilisés pour prédire le comportement des matériaux soumis à différentes conditions de chargement (de CTC à RTE par exemple) ou à différentes porosités. Dans le cas du critère  $MSDP_u$ , il faut également définir la dépendance des paramètres  $a_{1n}$ ,  $a_{2n}$ ,  $a_{3n}$  et  $I_{cn}$  (ou  $I_{1n}$ ) face à la porosité  $n$ . Le cas des paramètres  $a_{1n}$  et  $a_{2n}$  (qui varient selon  $\sigma_{cn}$  et  $\sigma_{tn}$ ) a déjà été explicitement défini avec l'équation (10). C'est aussi le cas avec les paramètres  $I_{cn}$  et  $I_{1n}$  (voir éqs. (10'), (15) à (17)).

Il est utile d'illustrer à l'aide d'exemples la méthode utilisée pour obtenir les paramètres nécessaires pour décrire ou même prédire le comportement des matériaux à porosité variable.

La figure 26 montre une description de la variation de la résistance en compression uniaxiale de plâtres en fonction de la porosité. Les paramètres obtenus pour l'équation (10) en compression sont  $x_1 = 1.334$ ,  $x_2 = 16.013$ ,  $\sigma_{c0} = 27.35$  MPa,  $n_{Cc} = 100\%$ . Ils seront employés par la suite pour prédire le comportement du plâtre à différentes porosités. Pour la résistance en traction uniaxiale,  $\sigma_{t0} = -6.3$  MPa, celle-ci a été estimée par régression à partir d'une série d'essais en compression triaxiale sur le plâtre intact ( $n = 54.2\%$ ). Pour les paramètres  $x_1$  et  $n_C$ , les même valeurs que pour la compression uniaxiale (soit  $x_1 = 1.334$  et  $n_{Ct} = 100\%$ ) sont utilisées pour décrire la variation de la résistance en traction uniaxiale  $\sigma_{tn}$ .

Pour obtenir les paramètres qui servent à décrire la variation de  $I_{cn}$  en fonction de la porosité  $n$ , on a choisi arbitrairement une série d'essais à une porosité soit  $n = 44\%$ . Le paramètre disponible mesuré (voir éq. (16)) est alors  $I_{1\ 44\%} = 82.4$  MPa. Les paramètres  $\sigma_{c44\%}$  et  $\sigma_{t44\%}$  sont pour leur part calculés avec l'équation (10) avec les paramètres présentés dans la figure 26; on obtient  $\sigma_{c44\%} = 16$  MPa, et  $\sigma_{t44\%} = 2.7$  MPa. Puis, une régression sur la série de données (à  $n = 44\%$ ) donne  $I_{c\ 44\%} = 45$  MPa (et  $a_{3\ 44\%} = 0.480$  selon l'équation (14)) et  $\phi = 30^\circ$ . Avec l'équation (17), on déduit ensuite  $I_{cn} = 27.64$

MPa. On dispose alors de tous les paramètres requis pour prédire la résistance de ce matériaux de différentes porosités. À la figure 27, il est montré que le  $MSDP_u$  prédit relativement bien la résistance du plâtre à différentes porosités. La correspondance n'est cependant pas parfaite.

On montre également la même procédure pour décrire et prédire les résistances d'un grès. La figure 28a montre une description de la résistance en compression uniaxiale avec  $x_1 = 1.21$ ,  $x_2 = 25.39$ ,  $\sigma_{c0} = 193.04$  MPa, et  $n_{Cc} = 52\%$ . Ces paramètres ont été obtenus à partir d'une série de données fournies par Farquhar et al. (1993, 1994). Une régression sur la série de donnée à  $n = 10.5\%$  du grès de Berea (en CTC) donne  $\sigma_{cn} = 3.8$  MPa (les valeurs de compression de  $x_1$  et  $n_C$  pour  $\sigma_{cn}$  ont été utilisés pour  $\sigma_{cn}$ ),  $\phi = 32^\circ$ ,  $I_{cn} = 380$  MPa. En utilisant l'équation (16) et les deux paramètres mesurés  $I_{1\ 11\%} = 1619.6$  MPa et  $I_{1\ 13\%} = 1299.3$  MPa, on obtient  $p = 0.4365$  et  $I'_{1n} = 538.6$  MPa. Le paramètre  $I'_{cn}$  peut être déduit de l'équation (17) en prenant en compte le paramètre obtenu soit  $I_{c\ 11\%} = 380$  MPa (voir Fig. 28b), d'où on tire  $I'_{cn} = 126.4$  MPa. Avec ces paramètres obtenus, le  $MSDP_u$  prédit assez bien les autres résultats expérimentaux (voir Fig. 28b), compte tenu de la grande dispersion des données expérimentales.

Lorsque  $I_{cn}$  est très grand ou que la plage des contraintes utilisée est trop faible ( $I_1 < I_{cn}$ ), la partie fermée de la surface de rupture ou d'écoulement n'apparaît pas dans le plan  $I_1$ - $J_2^{1/2}$ . Dans ce cas, il faut réduire le nombre de paramètres requis pour décrire le comportement des matériaux avec le critère  $MSDP_u$ . Par exemple, la figure 29 (a et b) montre comment obtenir les paramètres nécessaires à partir d'une série d'essais en compression (quasi-) uniaxiale (Fig. 29a) et d'une série d'essais en compression triaxiale sur des basaltes broyés qui ont une porosité  $n = 33.55\%$  (Fig. 29b). Ces paramètres peuvent être ensuite utilisés pour décrire et prédire la rupture de basaltes de différentes porosités (Fig. 29c). Cependant, les prédictions sont loin d'être parfaites puisque les paramètres décrivant la variation de la résistance en compression uniaxiale en fonction de la porosité ont été obtenus à partir des essais en compression triaxiale (voir Fig. 29a). Pour un tel matériau, un confinement de 0.4 MPa peut changer la structure du basalte broyé et réduire radicalement l'allure de la variation de la résistance en fonction de la porosité.

Un dernier exemple est montré en appliquant la même procédure pour un sel gemme boyé (données tirées de Liedtke et Bleich 1985). La déduction des paramètres, ainsi que la description et la



prédiction de la rupture du sel gemme broyé sont illustrées à la figure 30 (a et b). On constate que le critère  $MSDP_u$  peut, de façon générale, prédire certaines tendances de comportement lorsqu'il y a suffisamment de données expérimentales pour estimer les paramètres requis.

Figure 26. Variation de la résistance en compression uniaxiale d'un plâtre en fonction de la porosité (données tirées de Nguyen 1972): régression avec  $x_1 = 1.334$ ,  $x_2 = 16.013$ ,  $\sigma_{c0} = 27.35$  MPa, et  $n_{Cc} = 100\%$ .

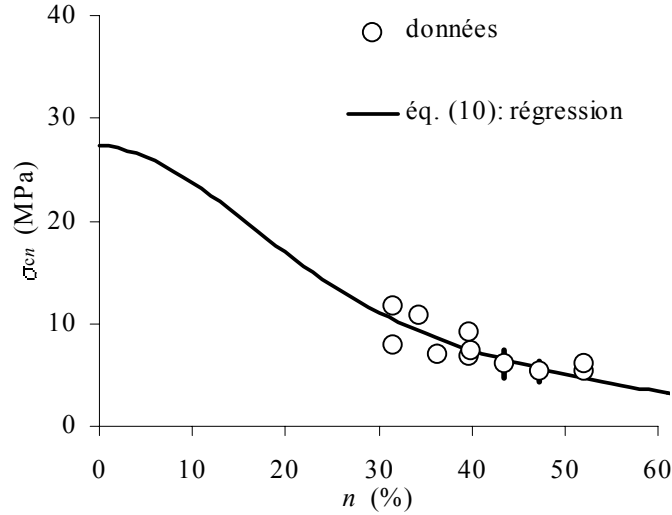


Figure 27. Description et prédiction de la résistance en CTC du plâtre (rapport eau/plâtre = 70%) avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Nguyen 1972); description (ligne foncée) pour  $n = 43.25\%$  avec  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 16$  MPa (calculé),  $\sigma_{vn} = 2.7$  MPa (calculé),  $I_{1n} = 82.4$  MPa (mesuré),  $I_{cn} = 45$  MPa (estimé), et  $a_{3n} = 0.482$  (calculé); prédictions (lignes fines) avec  $I_{1n}' = 50.6$  MPa,  $I_{cn}' = 27.6$  MPa, et  $p = 0.898$ .

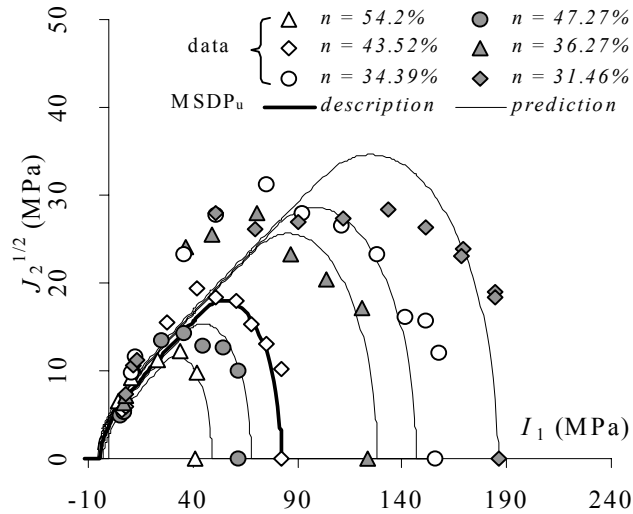


Figure 28a. Description de la résistance en compression uniaxiale des grès avec  $x_1 = 1.21$ ,  $x_2 = 25.39$ ,  $\sigma_{c0} = 193.04$  MPa, et  $n_{cc} = 51.94\%$  (données tirées de Farquhar et al. 1993, 1994).

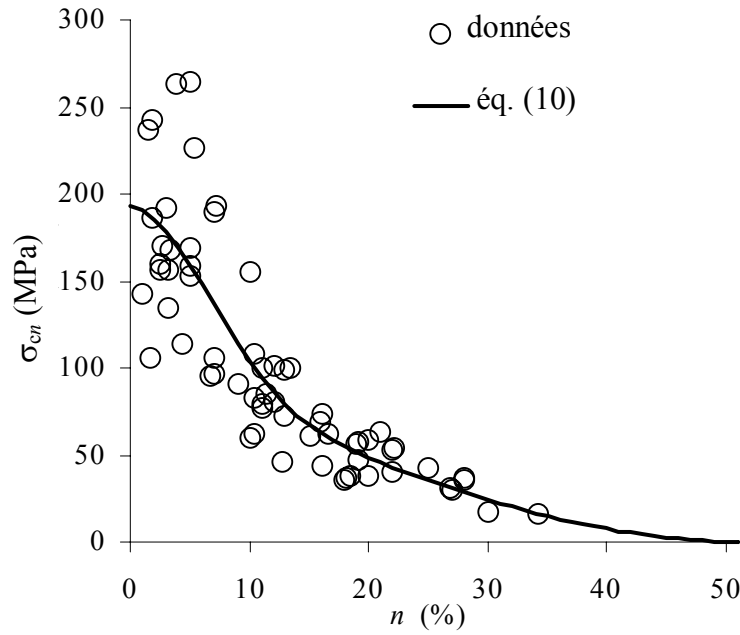


Figure 28b. Description de la résistance en CTC du grès de Berea avec le critère MSDP<sub>u</sub> (données tirées de Wong et al. 1992); description (ligne foncée) pour  $n = 10.5\%$  avec  $\phi = 32^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 163.6$  MPa (estimé),  $\sigma_{tn} = 3.8$  MPa (calculé),  $I_{1n} = 1619.8$  MPa (mesuré),  $I_{cn} = 380$  MPa (estimé), et  $a_{3n} = 0.1507$  (calculé); prédictions (lignes fines) avec  $I_{1n}' = 538.6$  MPa,  $I_{cn}' = 126.4$  MPa, et  $p = 0.436$ .

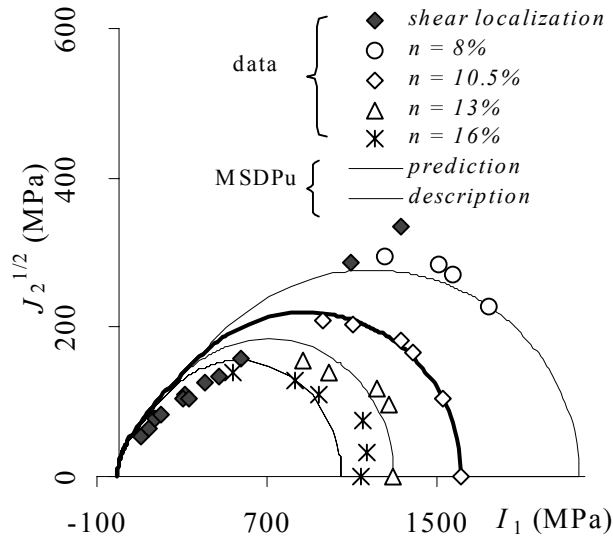


Figure 29a. Obtention des paramètres pour la résistance en compression uniaxiale d'un basalte broyé à partir d'une série d'essais CTC à faible confinement ( $\sigma_3 = 0.413$  MPa) (données tirées de Al-Hussaini 1983):  $x_1 = 1.261$ ,  $x_2 = 1.553$ ,  $\sigma_{c0} = 5.42$  MPa ( $\sigma_{c0}$  est la résistance en compression uniaxiale à  $n = 0$ ), et  $n_{Cc} = 80\%$ .

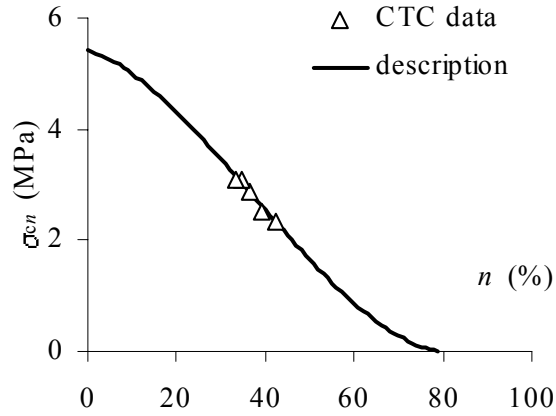


Figure 29b. Estimation des paramètres à partir d'une série d'essais en CTC sur le basalte broyé, avec  $n = 33.55\%$ :  $\sigma_{cn} = 1.384$  MPa,  $\sigma_{un} = 0$  MPa, et  $\phi = 35.64^\circ$  (données tirées de Al-Hussaini 1983).

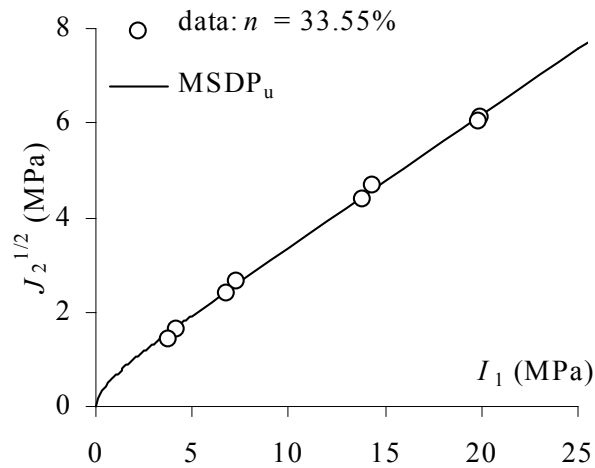


Figure 29c. Description et prédiction de la résistance en CTC du basalte broyé avec le critère MSDP<sub>u</sub> (données tirées de Al-Hussaini 1983) avec les paramètres déduits de la figure 29b:  $\sigma_{c0} = 2.396$  MPa, et  $\sigma_{tr} = 0$  MPa.

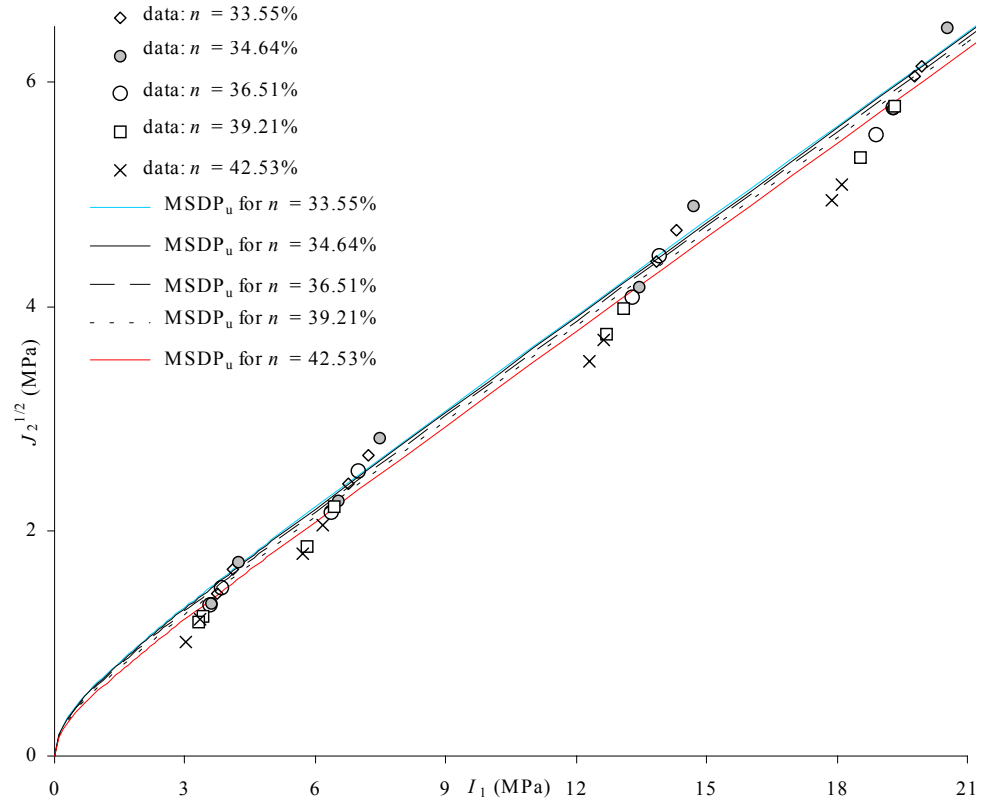


Figure 30a. Obtention des paramètres pour décrire la résistance d'un sel gemme broyé (données tirées de Liedtke et Bleich 1985) avec  $x_1 = 0.861$ ,  $x_2 = 30.285$ ,  $\sigma_{c0} = 27.27$  MPa et  $n_{Cc} = 81.91\%$ .

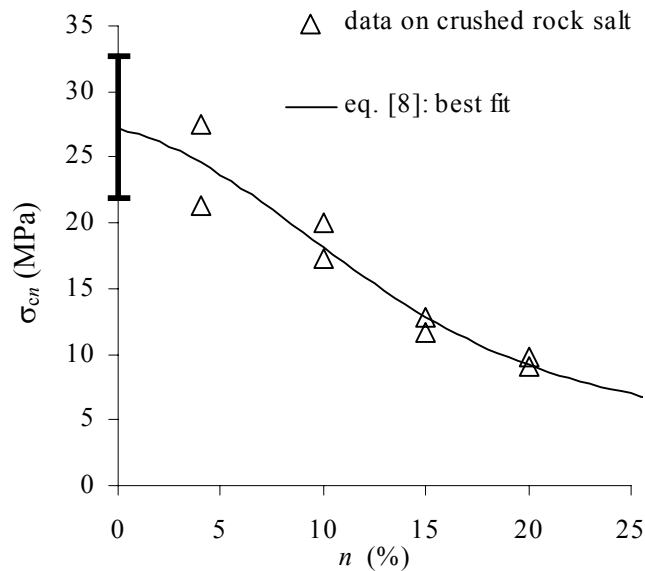
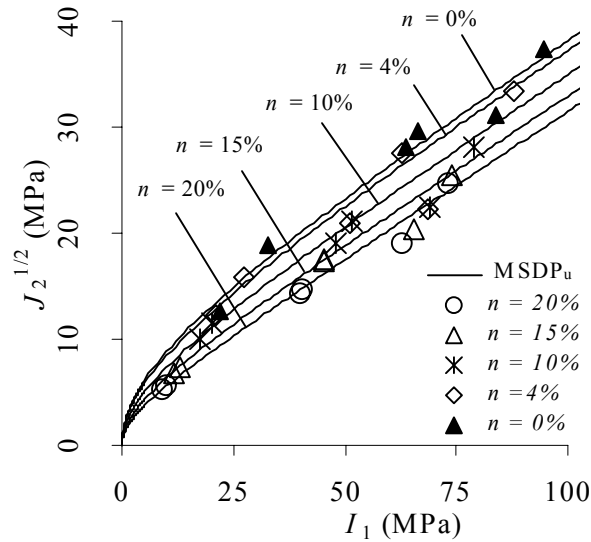


Figure 30b. Description et prédiction de la résistance du sel gemme broyé en CTC avec les paramètres déduits à la figure 30a; les paramètres  $\phi = 35.2^\circ$ , et  $\sigma_{i0} = 0$  MPa ont été estimés à partir des données obtenues à  $n = 0\%$  (données tirées de Liedtke et Bleich 1985).



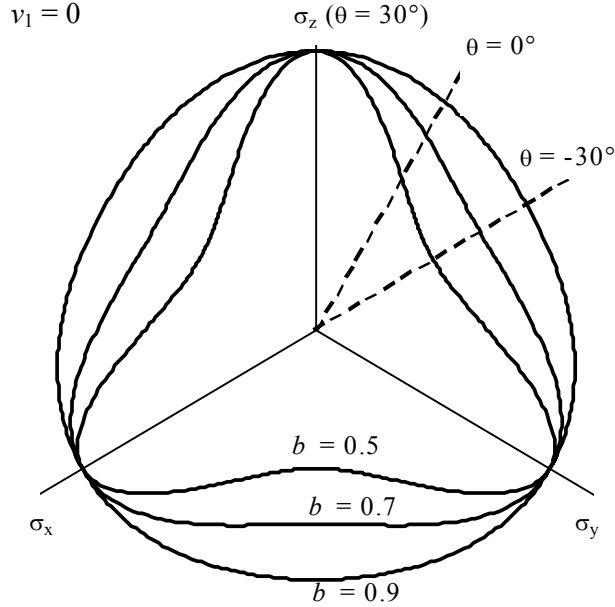
#### 4.4 Modification de la fonction $F_\pi$

Les sections qui précèdent ont montré la grande flexibilité du critère  $\text{MSDP}_u$ , qui peut être utilisé pour décrire la surface associée aux critères de divers matériaux poreux sous différentes géométries de chargement.

Comme les autres critères,  $\text{MSDP}_u$  comporte toutefois quelques limites d'application. Une des limitations du critère proposé ici est liée à la valeur de  $b$  (dans le plan  $\pi$ ) qui ne devrait pas être inférieure à environ 0.7. Lorsque  $b \leq 0.7$ , la surface devient concave dans le plan octaédral, tel qu'illustré à la figure 31. Elle violerait ainsi une prémisse de la théorie de plasticité qui implique une surface de rupture convexe dans le plan  $\pi$ .

Lorsque cette limitation est jugée importante, les auteurs proposent d'utiliser une fonction alternative basée sur une relation développée par Argyris et al. (1974) et Willam et Warnke (1975). Cette dernière formulation a été notamment utilisée par Peric et Ayari (2002a, b) pour étendre le modèle Cam-Clay.

Figure 31. Les surfaces de MSDP<sub>u</sub> avec la fonction  $F_\pi$  (éqs. (11) et (12)) dans le plan octaédral ( $\pi$ ) avec  $\Gamma = 1$  (la figure est normalisée pour obtenir  $F_\pi = 1$  à  $\theta = 30^\circ$ ).



On peut reformuler la fonction  $F_\pi$  (éq. 11) dans un cadre compatible avec la formulation de MSDP<sub>u</sub>. On obtient alors:

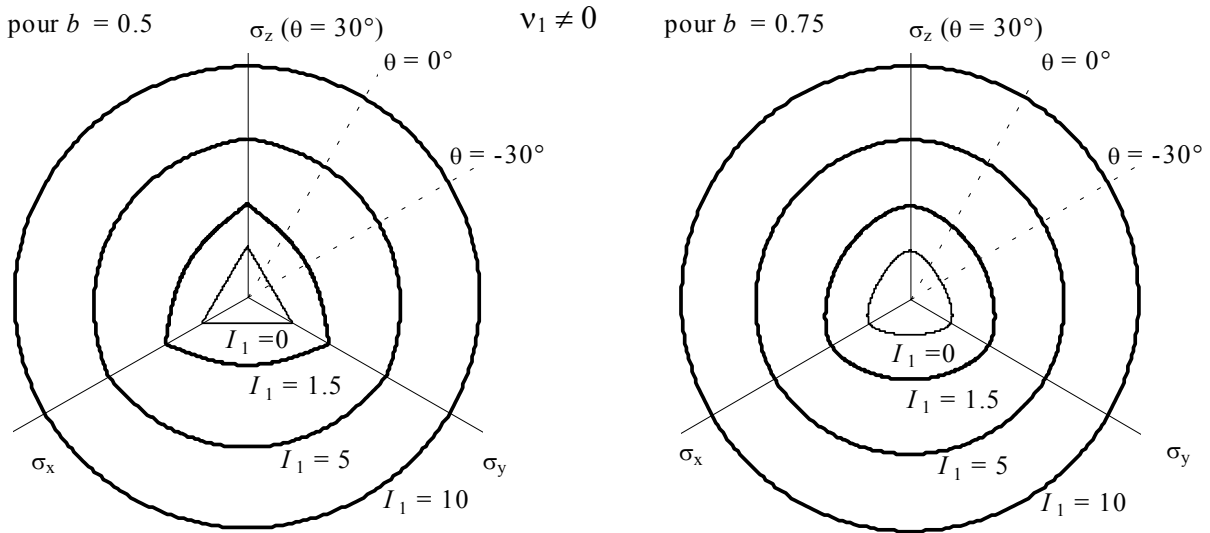
$$F_\pi = \left( \frac{(1-b^2)f_\theta + (2b-1)\{(1-b^2)f_\theta^2 + 5b^2 - 4b\}^{1/2}}{(1-b^2)f_\theta^2 + (1-2b)^2} \right)^v \quad (18)$$

où

$$f_\theta = \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta \quad (19)$$

La variation de la forme de la surface en fonction des paramètres  $b$  et  $v$  (et de la pression hydrostatique) est montrée schématiquement à la figure 32. On voit que la surface dans le plan  $\pi$  peut varier d'un triangle à un cercle. La valeur de  $b$  peut ainsi passer de 0.5 à 1 sans problème de convexité; cette plage de valeurs peut être exigée pour certains matériaux géologiques. Dans ce cas, il faut cependant noter que des points de singularités peuvent apparaître à  $\theta = 30^\circ$  (Fig. 32), une caractéristique jugée peu souhaitable du point de vue numérique. Il y a donc un compromis à faire entre ces deux aspects.

Figure 32. Les surfaces de  $\text{MSDP}_u$  avec les nouvelles fonctions  $F_\pi$  (éqs. (18) et (19)) dans le plan octaédral ( $\pi$ ).



## 5 CONCLUSION

Dans ce rapport, les auteurs ont d'abord revu les caractéristiques de plusieurs critères utilisés pour décrire les conditions d'écoulement, le potentiel plastique et la rupture des matériaux d'ingénierie incluant les matériaux poreux. On a ensuite montré que les caractéristiques de plusieurs critères existants peuvent être représentées avec le seul système d'équations formant le critère multiaxial  $\text{MSDP}_u$ . Ce critère a la particularité d'inclure explicitement une dépendance sur la porosité. En utilisant des résultats expérimentaux obtenus sur une grande variété de matériaux, il a été montré que le critère  $\text{MSDP}_u$  est d'application générale. L'implantation de ce critère dans un code numérique est en cours et fera l'objet de publications futures.

## REMERCIEMENTS

Une partie de ce travail a été financée par l'IRSST et par les participants à la Chaire industrielle CRSNG Polytechnique-UQAT en Environnement et gestion des rejets miniers (<http://www.polymtl.ca/enviro-geremi/>).

## RÉFÉRENCES

Al-Hussaini M. 1983. Effect of particle size and strain conditions on the strength of crushed basalt. Can. Geotech. J. 20: 706-717.

- Altenbach, H., Tushtev, K. 2001a. A new static failure criterion for isotropic polymers. *Mekhanika Kompozitnykh Materialov*, 37(5-6): 731-743.
- Altenbach, H., Tushtev, K. 2001b. An alternative formulation of a yield criterion for grey cast iron. *Forschung Im Ingenieurwesen - Engineering Research*, 66(4): 179-184.
- Altenbach, H., Stoychev, G.B., Tushtev, K.N. 2001. On elastoplastic deformation of grey cast iron. *Int J Plasticity*, 17(5): 719-736.
- Andreev, G.E. 1995. *Brittle Failure of Rock Materials - Test Results and Constitutive Models*. Rotterdam: Balkema.
- Argyris, J.H., Faust, G., Szimmat, J., Warnke, E.P., William, K.J. 1974. Recent developments in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 28(1): 42-75.
- Argyris, J.H., Faust, G., Szimmat, J., Warnke, E.P., William, K.J. 1974. Finite element ultimate pad analysis of three-dimensional concrete structures. Stuttgart, August 1974.
- Atkinson, J.H., Bransby, P.L. 1978. *The mechanics of soils – an introduction to critical state soil mechanics*. London: McGraw-Hill.
- Aubertin, M, Simon, R. 1996. A multiaxial failure criterion that combines two quadric surfaces. *Rock Mechanics: Tools and Techniques*, Aubertin M., Hassani F., Mitri H. (eds.), p. 1729-1736. Rotterdam: Balkema.
- Aubertin, M, Simon, R. 1997. A damage initiation criterion for low porosity rocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 34(3-4): #017. CD-ROM, Elsevier.
- Aubertin, M, Simon, R. 1998. Un critere de rupture multiaxial pour materiaux fragiles. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 25(2): 277-290.
- Aubertin, M, Gill, D.E., Ladanyi, B. 1994. Constitutive equations with internal state variables for the inelastic behavior of soft rocks. *Appl. Mech. Rev.* 47 (6-2), S97-S101.
- Aubertin, M., Julien, M.R., Li, L. 1998. The semi-brittle behavior of low porosity rocks. In *Proceedings of the 3rd North America Rock Mechanics Symposium*, Cancun, 3–5 June 1998. Vol. 2, pp. 65–90.
- Aubertin, M., Li, L., Simon, R., Khalfi, S. 1999. Formulation and application of a short term strength criterion for isotropic rocks. *Can. Geotech. J.* 36 (5), 947-960.
- Aubertin, M., Li, L., Simon, R. 2000. A multiaxial stress criterion for short term and long term strength of isotropic rock media. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 37, 1169-1193.
- Atkinson, J.H., Bransby, P.L. 1978. *The mechanics of soils : an introduction to critical state soil mechanics*. New York: McGraw-Hill Book.
- Baladi, G.Y., Rohani, B. 1979. Elastic-plastic model for saturated sand. *Journal of Geotechnical Engineering Division*, ASCE, 105(GT4): 465-480.
- Bousshine, L., Chaaba, A., De Saxce, G. 2001. Softening in stress-strain curve for Drucker-Prager non-associated plasticity. *Int J Plasticity*, 17 (1): 21-46.
- Brace, W.F. 1960. An extension of the Griffith's theory of fracture to rocks. *Journal of Geophysical Research*, 65(10).
- Charlez, Ph. A. 1991. *Rock mechanics; volume 1: theoretical fundamental*. Éditions Technip, Paris.
- Cheatham, J.B., Jr. 1967. Strain hardening of a porous limestone. *Soc. Petrol. Engnr. J.*, 229-234.
- Chen, Q., Nur, A. 1994. Critical concentration models for porous materials. *Advances in Porous Media*, M.Y. Corapcioglu (ed.), vol. 2, pp. 169-308. Amsterdam: Elsevier.



- Chen, W.F., Baladi, J.Y. 1985. Soil plasticity – Theory and Implementation. Elsevier.
- Chen, W.F., Han, D.J. 1988. Plasticity for Structural Engineers. New York: Springer-Verlag.
- Chen, W.F., Mizuno, E. 1990. Nonlinear analysis in soil mechanics : theory and implementation. Amsterdam: Elsevier.
- Chen, W.F., Saleeb, A.F. 1982. Constitutive equations for engineering materials. New York: Wiley.
- Chen, W.F., Zhang, H. 1991. Structural plasticity : theory, problems, and CAE software. New York : Springer-Verlag.
- Cristescu, N.D., Cazacu, O., Jin, J. 1996. Constitutive equation for compaction of ceramic powders. IUTAM Symp., Kluwer.
- da Silva, M.G., Ramesh, K.T. 1997. Rate-dependent deformations of porous pure iron. International Journal of Plasticity, 13(6-7): p 587-610.
- Desai, C.S. 1980. A general basis for yield, failure and potential functions in plasticity. Int. J. Num. Anal. Methods Geomech., 4: 361-375.
- Desai, C.S. 2001. Mechanics of materials and interfaces: The disturbed state concept. Boca Raton: CRC Press.
- Desai, C.S., Faruque, M.O. 1982. Further development of generalized basis for modeling of geological materials. Report, Dept. of Civil Eng. and Eng. Mech., University of Arizona, Tucson, AZ.
- Desai, C.S., Salami, M.R. 1987. Constitutive model for rocks. Journal of Geotechnical Engineering of ASCE, 113: 407-423.
- Desai, C.S., Siriwardane, H.J. 1984. Constitutive Laws for Engineering Materials with Emphasis on Geological Materials. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- di Prisco, C., Pastor, M. 2000. Constitutive equations in plasticity. Revue Française de Génie Civil, 4(5): 109-186.
- DiMaggio, F.L., Sandler, I.S. 1971. Material model for granular soils. J. Eng. Mech. Div., ASCE, 97(EM3):935-950.
- Drucker (1942, 1962)
- Drucker, D.C. 1949. The relation of experiments to mathematical theories of plasticity. J. Appl. Mech., Trans. ASNE, 16:349-357.
- Drucker, D.C. 1962. Chapter 46: Plasticity and viscoplasticity – Basic concepts. Handbook of Engineering Mechanics, W. Flügge (ed.). New York: McGraw Hill.
- Drucker, D.C. 1960. Plasticity. Proc. 1st Symp. On Naval Structural Mechanics, J.N. Goodin, N.J. Haff (eds.). pp. 407-455.
- Drucker, D.C., Prager, W. 1952. Soil mechanics and plastic analysis on limit design. Quat. Appl. Meth., 10(2): 157-165.
- Ehlers, W. 1995. A single surface yield function for geomaterials. Arch. Appl. Mech., 65: 246-259.
- Elliott, G.M., Brown, E.T. 1985. Yield of a soft, high porosity rock. Géotech. 35 (4), 413-423.
- Farquhar, R.A., Smart, B.G.D., and Crawford, B.R. 1993. Porosity-strength correlation: Failure criteria from porosity logs. In Transactions of the SPWLA 34th Annual Logging Symposium, Calgary, Canada, June 13-16, 1993. Society of Professional Well Analysts, pp. AA1 -A16.
- Farquhar, R.A., Somerville, J.M., and Smart, B.G.D. 1994. Porosity as a geomechanical indicator: an application of core and log data and rock mechanics. In Proceedings of the European Petroleum Conference, October 25-27, 1994. Society of Petroleum Engineers (SPE), Richardson, TX, USA, Vol. 1, pp. 481-489.
- François, D., Pineau, A., Zaoui, A. 1991. Elasticité et plasticité. Paris: Hermès.
- François, D., Pineau, A., Zaoui, A. 1995. Comportement mécanique des matériaux. Paris: Hermès

- Griffith, A.A. 1924. The theory of rupture. Proceedings, First International Congress on Applied Mechanics. Delft. Part 1, pp. 55-63.
- Gurson, A.L. 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Eng. Materials Technol.* 99 (1), 2-15.
- Hagglblad, H.A., Oldenburg, M. 1994. Modelling and simulation of metal powder die pressing with use of explicit time integration. *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.* 2: 893–911.
- Halphen, B., Salençon, J. 1987. *Elasto-plasticité*. Paris : Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Hansen, F.D., Callahan, G.D., Loken, M.C., Mellegard, K.D. 1998. Crushed-salt constitutive model update. SANDIA Report SAND97-2601 UC-721, Sandia National Laboratories.
- Hjelm, H.E. 1994. Yield surface for grey cast iron under biaxial stress. *Journal of Engineering Materials & Technology, ASME*, 116: 148-154.
- Hoek, E. 1964. Fracture of anisotropic rock. *J. South Afr. Institute Min. Metall.* 64 (10), 501-518.
- Hoek, E., Brown, E.T. 1980. Empirical strength criterion for rock masses. *J. Geotech. Eng. Div.* 106, 1013-1035.
- Hoskins, E.R. 1969. The failure of thick-walled hollow cylinders of isotropic rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 6, 99-125.
- Hsu, S.Y., Vogler, T.J., Kyriakides, S. 1999. Inelastic behavior of an AS4/PEEK composite under combined transverse compression and shear. Part II: Modeling. *Int J Plasticity*, 15(8): 807-836.
- Jrad, M., Masroufi, F., Monnet, J. 1995. Utilisation d'équations constitutives du comportement du sol pour la prédiction d'essais triaxiaux sur des granulats calcaires. *Canadian Geotechnical Journal*, 32(1): 156-166.
- Khan, A.S., Zhang, H.Y. 2000. Mechanically alloyed nanocrystalline iron and copper mixture: behavior and constitutive modeling over a wide range of strain rates. *Int J Plasticity*, 16(12): 1477-1492.
- Kim, M.K., Lade, D.V. 1984. Modeling rock strength in three dimensions. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* 21, 21-33.
- Krajcinovic, D. 1996. *Damage Mechanics*. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Elsevier.
- Lade, P.V. 1977. Elastic-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces. *Int. J. Solids Struct.*, 13: 1019-1035.
- Lade, P.V. 1993. Rock strength criteria - The theories and evidence. In *Comprehensive Rock Engineering - Principles, Practice and Projects*. Edited by J.A. Hudson. Pergamon Press, Vol. 1, pp. 255-284.
- Lade, P.V., Duncan, J.M. 1973. Cubical triaxial tests on cohesionless soil. *J. Soil Mech. Foundations Div. ASCE* 99 (SM10), 793-812.
- Lade, P.V., Duncan, J.M. 1975. Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil. *ASCE, Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 101(10): 1037-1053.
- Lee, J.H., and Oung, J. 2000. Yield functions and flow rules for porous pressure-dependent strain-hardening polymeric materials. *Journal of Applied Mechanics – Transactions of the ASME*, 67(2): 288-297.
- Lemaître, J. 1992. *A Course on Damage Mechanics*. New York: Springer-Verlag.
- Lemaître, J., Chaboche, J.L. 1988. *Mécanique des matériaux solides*. Paris: Dunod.
- Leon, Tore
- Lewis, R.W., Khoei, A.R. 2001. A plasticity model for metal powder forming processes. *Int J Plasticity*, 17(12): 1659-

1692.

- Li, G.C., Ling, X.W., Shen, H. 2000. On the mechanism of void growth and the effect of straining mode in ductile materials. *Int J Plasticity*, 16(1): 39-57.
- Li, L., Aubertin, M. 2003. A general relationship between porosity and uniaxial strength of engineering materials. *Can. J. Civ. Eng.*, 30(4): 644-658.
- Liedtke, L., Bleich, W. 1985. Convergence calculations for back-filled tunnels in rock salt. *Computer & Struct.* 21 (1/2), 353-378.
- Lode, W. 1926. Versuche über des Einfluss der mitt leren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle, Eisen, Kuper und Nickel. *Z. Phys.*, 36: 913-939.
- Logan, J.M. 1987. Porosity and the brittle-ductile transition in sedimentary rocks. *Physics and Chemistry of Porous Media II*, Banavar, J.R., Koplik, J., Winkler, K.W. (eds.). Am. Inst. Phys., AIP Conf. Proc., 154: 229-242.
- Lubliner, J. 1990. *Plasticity theory*. New York: McMillan Publishing.
- Maccarini M. 1987. Laboratory studies of weakly bonded artificial soil. Ph.D. thesis, University of London.
- Madsen, H.O., Sorensen, J.D., Olesen, R. 1989. Optimal inspection planning for fatigue damage of offshore structures. *Proceedings of ICOSSAR '89, the 5th International Conference on Structural Safety and Reliability, Part III, Aug 7-11 1989, San Francisco, CA, USA*, pp. 2099-2106. ASCE.
- Mahnken, R. 1999. Aspects on the finite-element implementation of the Gurson model including parameter identification. *Int J Plasticity*, 15(11): 1111-1137.
- Mahnken, R. 2002. Theoretical, numerical and identification aspects of a new model class for ductile damage. *Int J Plasticity*, 18(7): 801-831.
- Matsuoka, H., Nakai, T. 1974. Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, 232: 59-70.
- McClintock, F.A., Walsh, J.B. 1962. Friction on Griffith cracks under pressure. In: *Proceedings of 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics, Berkeley, 1962. Vol. 2*, pp. 1015-1021.
- Michelis, P., Brown, E.T. 1986. Yield equation for rock. *Canadian Geotechnical Journal*, 23(1): 9-17.
- Nadai, R. 1950. *Theory of flow and fracture of solids*. New York: McGraw-Hill.
- Nayak, G.C., Zienkiewicz, O.C. 1972. A convenient form of invariants and its application in plasticity. *Proc. ASCE*, 98(ST4): 949-854.
- Nguyen, D. 1972. Un concept de rupture unifié pour les matériaux rocheux denses et poreux. Ph.D. Thesis, École Polytechnique de Montréal - Université de Montreal.
- Novello, E.A., Johnston, I.W. 1989. Normally consolidated behaviour of geotechnical materials. *Proceedings of the International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, 13-18 August 1989, Rio de Janeiro, Br., v. 3*, pp. 2095-2100. Rotterdam: Balkema.
- Novello, E.A., Johnston, I.W. 1995. Geotechnical materials and the critical state. *Géotechnique*, 45(2): 223-235.
- Olevsky, E., Molinari, A. 2000. Instability of sintering of porous bodies. *Int J Plasticity*, 16(1): 1-37.
- Ottosen, N.S. 1977. A Failure Criterion for Concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 103:527-535.

- Ouellet J., Servant S. 2000. In-situ mechanical characterization of a paste backfill with a self-boring pressuremeter. *CIM Bulletin*, 93(1042): 110-115.
- Pan, X.D., Hudson, J.A. 1988. A simplified three dimensional Hoek-Brown yield criterion. *Rock Mechanics and Power Plants*, M. Romana (ed.), p. 95-103. Rotterdam: Balkema.
- Pariseau, W.G. 1994. On the significance of dimensionless failure criteria. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomec. Abstr.* 31 (5), 555-560.
- Pellegrino A. 1970. Mechanical behaviour of soft rock under high stresses. 2nd Int. Conf. On Rock Mech., Beograd, 2: 173-180.
- Peric, D., Ayari, M.A. 2002a. Influence of Lode's angle on the pore pressure generation in soils. *Int J Plasticity*, 18(8): 1039-1059.
- Peric, D., Ayari, M.A. 2002b. On the analytical solutions for the three-invariant Cam clay model. *Int J Plasticity*, 18(8): 1061-1082.
- Perrin, G., Leblond, J.B. 2000. Accelerated void growth in porous ductile solids containing two populations of cavities. *Int J Plasticity*, 16(1): 91-120.
- Ponte-Castaneda, P., Zaidman, M. 1994. Constitutive models for porous materials with evolving micro-structure. *Int. Mech. Phys. Solids*, 42(9): 1459-1497.
- Potts, D.M., Zdravkovic, L. 1999. *Finite element analysis in geotechnical engineering: Theory*. London: Thomas Telford.
- Radi, E., Bigoni, D., Loret, B. 2002. Steady crack growth in elastic-plastic fluid-saturated porous media. *Int J Plasticity* 18(3): 345-358.
- Ragab, A.R., Saleh, C.A.R. 1999. Evaluation of constitutive models for voided solids. *Int J Plasticity*, 15(10): 1041-1065.
- Rampello S. 1991. Some remarks on the mechanical behaviour of stiff clays: the example of Todi clay. *Workshop on Experimental Characterization and Modelling of Soils and Soft Rocks*, Naples, pp. 131-186.
- Roscoe, K.H., Burland, J.B. 1968. On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay. *Engineering Plasticity*, Heyman J., Leckie F.A. (eds.), Cambridge at The University Press, pp. 535-609.
- Roscoe, K.H., Schofield, A.N., Wroth, C.P. 1958. On the yielding of soils. *Géotechnique*, 9:71-83.
- Roscoe, K.H., Schofield, A.N., Thurairajah, A. 1963. Yielding of clays in states wetter than critical. *Géotechnique*, 13:211-240.
- Rousselier, G. 1987. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nuclear Engineering and Design*, 105: 97-111.
- Sandroni S.S. 1981. Solos residuais pesquisados realizados na PCC-RJ. *Brazilian Symp. Engng Tropical Soils*, Rio de Janeiro 2, 30-65.
- Schleicher, F. 1926. *Z. Angew. Math. Mech.* 6, 199.
- Schofield, A.N., Worth, C.P. 1968. *Critical state soil mechanics*. London: McGraw-Hill Book Company.
- Schwartz, A.E. 1964. Failure of rock in the triaxial test. *Proceedings, 6th US Symposium on Rock Mechanics*, Missouri, 1964. pp. 109-151.

- Senseny, P.E., Fossum, A.F. Pfeifle, T.W. 1983. Non-associative constitutive laws for low porosity rocks. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 7(1): 101-115.
- Sheorey, P.R. 1997. *Empirical Rock Failure Criteria*. Rotterdam: Balkema.
- Shima, S., Oyane, M. 1976. Plasticity theory for porous metals. *International Journal of Mechanical Sciences*, 18: 285-291.
- Slater, R.A.C. 1977. *Engineering plasticity: theory and application to metal forming processes*. New York: Wiley.
- Skrzypek, J.J., Hetnarski, R.B. 1993. *Plasticity and creep: Theory, examples, and problems*. Boca Raton: CRC Press.
- Sofronis, P., McMeeking, R.M. 1992. Creep of power-law material containing spherical voids. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 59(2): S88-S95.
- Takahashi, M., Koide, H. 1989. Effect of intermediate principal stress on strength and deformation behaviour of sedimentary rocks at the depth shallower than 2000 m. *Rock at Great Depth*, V. Maury, D. Fourmaintraux (eds.), vol. 1, pp. 19-26. Rotterdam: Balkema.
- Theocaris, P.S. 1995. Failure criteria for isotropic bodies revisited. *Engineering Fracture Mechanics*, 51(2): 239-195.
- Thorel, L. 1994. *Plasticité et endommagement des roches ductiles - Application au sel gemme*. Thèse de doctorat, École Nationale de Ponts et Chaussées.
- Tvergaard, V. 1981. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, 17: 389-407.
- Tvergaard, V. 1982. On localization in ductile materials containing spherical voids. *International Journal of Fracture*, 18: 237-252.
- Tvergaard, V. 1990. Material failure by void growth to coalescence. *Advances in Applied Mechanics*, J.W. Hutchinson, T.Y. Wu (eds.), vol. 27, pp. 83-151.
- Tvergaard, V., Needleman, A. 1984. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgy*, 32: 157-169.
- Tvergaard, V., Needleman, A. 1986. Effect of material rate sensitivity on failure modes in charpy V-notch test. *Journal of Mechanics and Physics of solids*, 34: 213-241.
- Uriel S., Serrano A.A. 1973. Geotechnical properties of two collapsible volcanic soils of low bulk density at the site of two dams in the Canary Islands (Spain). *Proc. 8th Int. Conf. Soil Mech. Fdn Engng, Moscow 2.2*, 257-264.
- Wan R.G., Guo P.J. 1998. A simple constitutive model for granular soils: modified stress-dilatancy approach. *Computer and Geotechnics* 22(2): 109-133.
- Wan R.G., Guo P.J. 2001. Effect of microstructure on undrained behaviour of sands. *Can. Geotech. J.* 38: 16-28.
- Willam, K.J., Warnke, E.P. 1975. Constitutive model for triaxial behaviour of concrete. *Proc. Concrete Structures Subjected to Triaxial Stress*, IABSE Report 19, ISMES, Zurich, Switzerland.
- Wong, T.F., Szeto, H., Zhang, J. 1992. Effect of loading path and porosity on the failure mode of porous rocks. *Appl. Mech. Rev.* 45 (8), 281-293.
- Yong, R.N., Ko, H.Y. (eds.) 1981. *Proceedings of the Workshop on Limit Equilibrium, Plasticity, and Generalized Stress-Strain in Geotechnical Engineering*, McGill University, May 28-30, 1980. New York: American Society of Civil Engineers.

- Yu, M.H., Zan, Y.W., Zhao, J., Yoshimine, M. 2003. A Unified Strength criterion for rock material. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 39 (8): 975-989 DEC 2002.
- Zienkiewicz, O.C., Owen, D.R. J., Phillips, D.V., Nayak, G.C. 1972. Finite element methods in the analysis of reactor vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 20(2): 507-541.
- Nayak, G.C., Zienkiewicz, O.C. 1972. Elasto-plastic stress analysis. a generalization for various constitutive relations including strain softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5(1): 113-135.

## LISTE DES SYMBOLES

- $\alpha$  : une fonction de durcissement; utilisés dans Desai.
- $\alpha$  : paramètre du matériau; utilisés dans Ehlers et DiMaggio-Sandler et le critère MSDP<sub>u</sub>.
- $\alpha_{CM}$  : pente de la ligne d'état critique (CSL) dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$ ; utilisé dans Cam Clay et Cam Clay modifié.
- $\beta$  : paramètre du matériau; utilisés dans Desai, DiMaggio-Sandler et Ehlers.
- $\delta$  : paramètre du matériau; utilisés dans Ehlers.
- $\delta_{ij}$  : delta Kronecker;  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  et  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ .
- $\varepsilon$  : paramètre du matériau; utilisés dans Ehlers.
- $\phi$  : angle de frottement; utilisé dans Mohr-Coulomb et le critère MSDP<sub>u</sub>.
- $\phi_b$  : angle de frottement de base.
- $\phi_r$  : angle de frottement résiduel.
- $\gamma$  : paramètre de matériau; utilisé dans Desai, DiMaggio-Sandler et Ehlers.
- $\Gamma$  : paramètre de continuité;  $\Gamma = 1 - D$ .
- $\kappa$  : paramètre du matériau; utilisés dans Ehlers.
- $\kappa_0$  : paramètre du matériau; utilisés dans Hansen et al.
- $\kappa_1$  : paramètre du matériau; utilisés dans Hansen et al.
- $\kappa_2$  : paramètre du matériau; utilisés dans Hansen et al.
- $\lambda$  : fonction de l'angle de Lode  $\theta$ ; utilisés dans Ottosen.
- $\nu$  : coefficient de Poisson.
- $\pi$  : plan octaédral; un plan perpendiculaire à l'axe hydrostatique  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ .
- $\theta$  : angle de Lode;  $\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \frac{3\sqrt{3} J_3}{2\sqrt{J_2^3}}$ ,  $30^\circ \geq \theta \geq -30^\circ$ .
- $\sigma$  : contrainte normale sur un plan donné.
- $\sigma_1$  : contraintes principales majeure.
- $\sigma_2$  : contraintes principales intermédiaire.
- $\sigma_3$  : contraintes principales mineure.
- $\sigma_c$  : résistances en compression uniaxiale.

- $\tilde{\sigma}_c$  : résistances en compression uniaxiale en prenant en compte les défauts ponctuelle (porosité) et les défauts continues;  $\tilde{\sigma}_c = \Gamma \sigma_{cn}$ .
- $\sigma_{cn}$  : résistance en compression uniaxiale pour une valeur de porosité  $n$ .
- $\sigma_{ij}$  : tenseur des contraintes.
- $\sigma_M$  : contrainte d'écoulement d'un matériau équivalent non poreux.
- $\sigma_m$  : contrainte moyenne;  $\sigma_m = I_1/3$ .
- $\sigma_t$  : résistances en traction uniaxiales.
- $\tilde{\sigma}_t$  : résistances en traction uniaxiale en prenant en compte les défauts ponctuelle (porosité) et les défauts continues;  $\tilde{\sigma}_t = \Gamma \sigma_{tn}$ .
- $\sigma_{tn}$  : résistance en traction uniaxiale pour une valeur de porosité  $n$ .
- $\sigma_u$  : résistance uniaxiale; pour la compression ( $\sigma_u = \sigma_c$ ) ou la traction ( $\sigma_u = \sigma_t$ ).
- $\sigma_{u0}$  : valeur (théorique) de  $\sigma_{un}$  pour  $n = 0$ .
- $\sigma_{un}$  : résistance uniaxiale pour une porosité  $n$ ; pour la compression ( $\sigma_{un} = \sigma_{cn}$ ) ou la traction ( $\sigma_{un} = \sigma_{tn}$ ).
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  : axes cartésiens (souvent utilisés pour représenter les axes principaux).
- $\sigma_y$  : une composante des contraintes principales (elle peut être  $\sigma_1, \sigma_2$ , ou  $\sigma_3$ ).
- $\sigma_z$  : une composante des contraintes principales (elle peut être  $\sigma_1, \sigma_2$ , ou  $\sigma_3$ ).
- $\tau$  : contrainte de cisaillement sur un plan donné.
- $\Omega$  : fonction de porosité; utilisé dans Hansen et al.
- $\langle \rangle$  : crochets de MacCauley;  $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ .
- $a$  : constante; utilisés dans Ottosen.
- $a_1$  : paramètre du matériau; utilisés dans Shima-Oyane.
- $a_{1n}$  : paramètre permettant de prendre en compte l'influence des défauts ponctuels sur les résistances des matériaux poreux via leur dépendance sur  $n$ ; utilisé dans le critère MSDP<sub>u</sub>.
- $\tilde{a}_1$  : paramètre du matériau; utilisés dans le critère MSDP<sub>u</sub>.
- $a_2$  : paramètre du matériau; utilisés dans Shima-Oyane.
- $\tilde{a}_2$  : paramètre du matériau; utilisés dans le critère MSDP<sub>u</sub>.
- $a_{2n}$  : paramètre permettant de prendre en compte l'influence des défauts ponctuels sur les résistances des matériaux poreux via leur dépendance sur  $n$ ; utilisé dans le critère MSDP<sub>u</sub>.



- $a_3$  : paramètre du matériau; utilisés dans le critère MSDP<sub>u</sub>.
- $a_{3n}$  : paramètre servant à représenter le comportement des matériaux poreux sous forte compression hydrostatique, lorsque la surface (écoulement, rupture) se referme du côté positif de  $I_1$  ( $> I_{cn}$ ).
- $b$  : constante; utilisés dans Ottosen.
- $b$  : paramètre contrôlant l'asymétrie de la surface (entre  $\theta = 30^\circ$  et  $-30^\circ$ ) du critère MSDP<sub>u</sub> dans le plan  $\pi$ .
- $c$  : cohésion du matériau; utilisés dans Mohr-Coulomb.
- $C$  : paramètre de matériau; utilisé dans DiMaggio-Sandler.
- $C$  : valeurs absolues de la résistance en compressive uniaxiales du matériau équivalent non poreux; utilisés dans Lee et Oung.
- CTC: compression triaxiale conventionnelle ( $\theta \geq 30^\circ$ ).
- $D$  : variable d'endommagement isotrope.
- $e$  : indice de vide.
- $E$  : module de Young.
- $F$  : fonction générale d'un critère.
- $F_\pi$  : fonction qui donnent la position et la forme de la surface dans le plan  $\pi$ .
- $F_0$  : fonction qui donnent la position et la forme de la surface dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$ .
- $G$  : module de cisaillement.
- $I_1$  : premier invariant du tenseur des contraintes,  $I_1 = \text{tr}(\sigma_{ij})$ .
- $I_{10}$  : valeur de  $I_1$  à l'écrasement du matériau sous pression hydrostatique; utilisé dans Cam Clay et Cam Clay modifié.
- $I'_{1n}$  : paramètre du matériau.
- $I_{1s}$  : décalage de l'axe  $I_1$  relié à la résistance en traction uniaxiale; utilisés dans Desai.
- $I_3$  : troisième invariant du tenseur des contraintes,  $I_3 = (1/3)\sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}$ .
- $I'_c$  : paramètre du matériau; utilisés dans le critère MSDP<sub>u</sub>.
- $I'_{cn}$  : paramètre du matériau.
- $I_{cn}$  : paramètre servant à représenter le comportement des matériaux poreux sous forte compression hydrostatique, lorsque la surface (écoulement, rupture) se referme du côté positif de  $I_1$  ( $> I_{cn}$ ).
- $J_2$  : deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques,  $J_2 = (1/2)S_{ij} S_{ij}$ .
- $J_3$  : troisième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques,  $J_3 = (1/3)S_{ij} S_{jk} S_{ki}$ .
- $k$  : paramètre du matériau; utilisé dans Drucker-Prager, Lade et le critère SMP.

$k_1$  : constante; utilisés dans Ottosen.  
 $k_2$  : constante; utilisés dans Ottosen.  
 $m$  : paramètre du matériau; utilisé dans Ehlers, Hansen et al., Hoek-Brown, Lade et Sofronis-McMeeking.  
 $M$  : paramètre relié au changement de phase (de contractant à dilatant); utilisés dans Desai.  
 $n$  : porosité.  
 $n'$  : seuil lié aux effets de la coalescence des vides ( $n' < n_C$ ); utilisés dans Tvergaard-Needleman.  
 $n^*$  : fonction de  $n$ ; utilisée dans Tvergaard-Needleman.  
 $n_1$  : une valeur de  $n$ .  
 $n_2$  : une valeur de  $n$ .  
 $n_3$  : une valeur de  $n$ .  
 $n_C$  : porosité critique pour laquelle  $\sigma_{un}$  devient nulle.  
 $n_{Cc}$  : porosité critique pour laquelle  $\sigma_{cn}$  devient nulle.  
 $n_{Ct}$  : porosité critique pour laquelle  $\sigma_{tn}$  devient nulle.  
 $n_t$  : paramètre du matériau; utilisés dans Hansen et al.  
 $p$  : paramètre du matériau.  
 $p_1$  : paramètre du matériau.  
 $p_2$  : paramètre du matériau.  
 $p_a$  : pression atmosphère; utilisés dans Lade.  
 $q$  : paramètre du matériau; utilisé dans éq. (15).  
 $q_1$  : paramètre du matériau; utilisés dans Tvergaard et Tvergaard-Needleman.  
 $q_2$  : paramètre du matériau; utilisés dans Tvergaard et Tvergaard-Needleman.  
 $R$  : ratio entre l'axe majeur  $a$  et l'axe mineur  $b$  d'une ellipse; utilisé dans DiMaggio-Sandler.  
RTE: extension triaxiale réduite ( $\theta \geq -30^\circ$ )  
 $s$  : paramètre du matériau; utilisés dans Hoek-Brown.  
 $S_{ij}$  : tenseur des contraintes déviatoriques;  $S_{ij} = \sigma_{ij} - I_1 \delta_{ij}$ .  
 $T$  : values absolues de la résistance en traction uniaxiales du matériau équivalent non poreux; utilisés dans Lee et Oung.  
 $v$  : exposant qui reflète l'effet de la pression hydrostatique sur l'évolution de la forme de la surface dans le plan  $\pi$ .  
 $v_1$  : paramètre du matériau.

$x_1$  : paramètre du matériau; utilisées pour décrire la variation de  $\sigma_{un}$  en fonction de  $n$ .

$x_2$  : paramètre du matériau; utilisées pour décrire la variation de  $\sigma_{un}$  en fonction de  $n$ .

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1. Quelques critères tridimensionnels utilisés pour les matériaux poreux frictionnels.

## LISTE DES FIGURES

- Figure 1. Représentation schématisée des surfaces associées à plusieurs critères utilisés pour les matériaux poreux.
- Figure 2. Représentation schématique du critère  $MSDP_u$  pour des matériaux peu poreux, avec  $a_{3n} = 0$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\nu_1 = 0$  ( $\nu = 1$ ).
- Figure 3. Illustration de l'évolution de la surface de  $MSDP_u$  dans le plan  $\pi$  lorsque  $I_1$  augmente;  $\Gamma = 1$ ,  $b = 0.75$ ,  $\nu_1 \neq 0$  ( $\nu$  varie avec  $I_1$ ).
- Figure 4. Représentation schématique du critère  $MSDP_u$  pour des matériaux poreux avec  $a_{3n} \neq 0$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\nu_1 = 0$  ( $\nu = 1$ ),  $b = 0.75$ .
- Figure 5. Représentation schématique du critère  $MSDP_u$  pour des matériaux poreux avec  $a_{3n} \neq 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\nu_1 = 0$  ( $\nu = 1$ ).
- Figure 6. Influence de la porosité  $n$  (a), de l'angle  $\alpha$  (b), de la résistance en compression uniaxiale  $\sigma_{cn}$  (c), de la résistance en traction uniaxiale  $\sigma_{tn}$  (d), de  $I_{cn}$  (e), et de  $a_{3n}$  (f) sur l'allure du critère  $MSDP_u$  dans le plan  $I_1 - J_2^{1/2}$ .
- Figure 7. Représentation schématique du critère  $MSDP_u$  dans l'espace tridimensionnel des contraintes.
- Figure 8. Comparaison graphique entre le critère  $MSDP_u$  et différents critères existants (montrée pour des paramètres normalisés).
- Figure 9. Schématisation du critère  $MSDP_u$  pour les matériaux poreux (avec "cap") et peu poreux; l'effet de la porosité sur la surface débute à  $I_{cn}$ ; la surface se referme sur l'axe  $I_1$  à  $I_{1n}$ ; la valeur de  $J_2^{1/2}$  maximale correspond au point M.
- Figure 10.  $I_{1n}$  avec la porosité du plâtre, essais sur des éprouvettes cylindriques soumis à une compression hydrostatique (rapport eau/plâtre = 70%) (données tirées de Nguyen 1972);  $I_{1n}' = 1052.9$  MPa,  $n_{Cc} = 100\%$ ,  $x_1 = 0.2847$  et  $x_2 = 14.225$  avec l'équation (10');  $I_{1n}' = 1604.5$  MPa et  $q = 6.876$  avec l'équation (15);  $I_{1n}' = 50.6$  MPa,  $n_{Cc} = 100\%$ , et  $p_1 = 0.898$  avec l'équation (16).
- Figure 11a.  $MSDP_u$  appliqué à la description de la rupture d'un grès, avec  $\sigma_{cn} = 85$  MPa,  $\sigma_{tn} = 2$  MPa,  $\phi \approx 28^\circ$ ,  $b = 0.75$ ,  $I_{cn} \gg$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\nu_1 = 0$  (données tirées de Takahashi et Koide 1989).
- Figure 11b. Application du critère  $MSDP_u$  pour décrire le seuil d'endommagement en CTC du sel gemme (données tirées de Thorel 1994);  $b = 0.75$ ,  $\phi = 0^\circ$ ,  $\tilde{\sigma}_c = 37$  MPa,  $\tilde{\sigma}_t = 3$  MPa.
- Figure 12. Description de la résistance de rupture en CTC du granite de Westerly broyé avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Zoback et Byerlee 1976) avec  $b = 0.75$ ,  $\phi = 33.8^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 3.1$  MPa,  $\sigma_{tn} = 0$  MPa.
- Figure 13. Description de la résistance à la rupture en CTC de poudres d'aluminium avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Cristescu et al. 1996): a) aluminium A10 avec  $\phi = 35.5^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 27.4$  kPa,  $\sigma_{tn} = 0$  kPa; b) aluminium A16-SG, avec  $\phi = 30^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 50$  kPa,  $\sigma_{tn} = 0$  kPa.

- Figure 14. Description de la résistance à la rupture de l'argile raide de Todi avec le critère  $\text{MSDP}_u$  pour des essais en CTC (données tirées de Rampello 1991): a) pour des échantillons gonflés ("swollen") avec  $\phi = 51.5^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 0.093 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 0 \text{ MPa}$ ; b) pour des échantillons non remaniés perturbés avec  $\phi = 61.2^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 0.54 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 0.037 \text{ MPa}$ .
- Figure 15. Description de la résistance à la rupture en CTC du sable d'Ottawa avec le critère  $\text{MSDP}_u$ , avec un chargement au delà de  $I_{cn}$  (données tirée de Wan et Guo 2001);  $b = 0.75$ ,  $\phi = 26.6^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 1.9 \text{ MPa}$  (estimé),  $\sigma_{tn} = 0 \text{ MPa}$ ,  $a_{3n} = 0.0482$  (estimé), et  $I_{cn} = 1156.6 \text{ MPa}$  (estimé).
- Figure 16. Description de la résistance à la rupture en CTC du sable du fleuve Sacramento avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Wan et Guo 1998): a) pour des échantillons denses avec  $\phi = 35.8^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 196.67 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 0 \text{ kPa}$ ,  $I_{cn} > 12000 \text{ kPa}$ ; b) pour des échantillons plus lâches avec  $\phi = 29.1^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 43.67 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 0 \text{ kPa}$ .
- Figure 17a. Description de la résistance à la rupture en CTC du calcaire d'Indiana avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirée de Schwartz 1964) avec  $\phi = 35^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 38 \text{ MPa}$  (mesuré),  $\sigma_{tn} = 3 \text{ MPa}$  (estimé),  $a_{3n} = 0.105$  (estimé), et  $I_{cn} = 40 \text{ MPa}$  (estimé).
- Figure 17b. Description de la résistance à la rupture en CTC de shale Weald avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Madsen et al. 1989);  $\phi = 38^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 5 \text{ MPa}$  (estimé),  $\sigma_{tn} = 0.1 \text{ MPa}$  (estimé),  $a_{3n} = 0.21$  (estimé), et  $I_{cn} = 45 \text{ MPa}$  (estimé).
- Figure 17c. Description de la résistance du calcaire de Trenton normalement consolidé à 10 MPa avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Nguyen 1972);  $\phi = 33^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 10 \text{ MPa}$  (estimé),  $\sigma_{tn} = 0.5 \text{ MPa}$  (estimé),  $a_{3n} = 0.134$  (estimé), et  $I_{cn} = 18 \text{ MPa}$  (estimé).
- Figure 17d. Description de la résistance en CTC d'un craie avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Elliott et Brown 1985);  $\phi = 28^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 8 \text{ MPa}$  (estimé),  $\sigma_{tn} = 0.1 \text{ MPa}$  (estimé),  $a_{3n} = 0.125$  (estimé), et  $I_{cn} = 11 \text{ MPa}$  (estimé).
- Figure 17e. Description de la résistance en CTC d'un calcaire avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Cheatham 1967);  $I_{cn} = 0 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{cn} = 20 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 0.5 \text{ MPa}$ ,  $\phi = 28^\circ$ ,  $a_{3n} = 0.102$  pour le calcaire pré- consolidé à 34.5 MPa et  $I_{cn} = 0 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{cn} = 12 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 0.5 \text{ MPa}$ ,  $\phi = 28^\circ$ ,  $a_{3n} = 0.09$  pour le calcaire intact (non consolidé).
- Figure 18. Description de la résistance en CTC d'échantillons de plâtres (rapport eau/plâtre = 50%) avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Nguyen 1972); description du plâtre intact ( $n = 44.3\%$ ) avec  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 13.6 \text{ MPa}$  (mesuré),  $\sigma_{tn} = 2.6 \text{ MPa}$  (mesuré),  $I_{1n} = 79.6 \text{ MPa}$  (mesuré), et  $I_{cn} = 8 \text{ MPa}$  (estimé); description pour du plâtre préconsolidé à 51.7 MPa ( $n = 32.25\%$ ) avec  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 13.3 \text{ MPa}$  (mesuré),  $\sigma_{tn} = 2 \text{ MPa}$  (estimé),  $I_{1n} = 154.9 \text{ MPa}$  (mesuré), et  $I_{cn} = 15 \text{ MPa}$  (calculé).

- Figure 19a. Description de la résistance en CTC de l'argile de Matagami avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Nguyen 1972);  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 48 \text{ kPa}$  (mesuré),  $\sigma_{tn} = 1 \text{ kPa}$  (estimé),  $a_{3n} = 0.9$  (estimé), et  $I_{cn} = 180 \text{ kPa}$  (estimé).
- Figure 19b. Description de la résistance en CTC de l'argile de Leda avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Nguyen 1972);  $\phi = 10^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 107.8 \text{ kPa}$  (mesuré),  $\sigma_{tn} = 15 \text{ kPa}$  (estimé),  $a_{3n} = 0.9$  (estimé), et  $I_{cn} = 530 \text{ kPa}$  (estimé).
- Figure 20a. Description de la résistance en CTC d'un sol résiduel basaltique avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Maccarini 1987);  $\phi = 22.7^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 914.1 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 127.4 \text{ kPa}$ ,  $a_{3n} = 0.10$ , et  $I_{cn} = 13.6 \text{ kPa}$ .
- Figure 20b. Description de la résistance en CTC d'un sol résiduel (riche en gneiss) avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Sandroni 1981);  $\phi = 24.5^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 119.9 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 0.9 \text{ kPa}$ ,  $a_{3n} = 0.09$ , et  $I_{cn} = 45.4 \text{ kPa}$ .
- Figure 21a. Description de la rupture et de la limite élastique du grès de Kayenta en CTC avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Wong et al. 1992);  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 30 \text{ MPa}$  (mesuré),  $\sigma_{tn} = 2 \text{ MPa}$  (estimé),  $a_{3n} = 0.115$  (estimé), et  $I_{cn} = 250 \text{ MPa}$  (estimé).
- Figure 21b. Description de la rupture et de la limite élastique d'échantillons de roche de Bath ("Bath stone") avec le critère  $\text{MSDP}_u$  en CTC (données tirées de Elliott et Brown 1985);  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 15 \text{ MPa}$  (mesuré),  $\sigma_{tn} = 1 \text{ MPa}$  (estimé),  $a_{3n} = 0.095$  (estimé), et  $I_{cn} = 0 \text{ MPa}$  (estimé).
- Figure 21c. Description de la rupture et de la limite élastique d'un tuf (en CTC) avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Pellegrino 1970);  $\phi = 20^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 3.8 \text{ MPa}$  (mesuré),  $\sigma_{tn} = 0.5 \text{ MPa}$  (estimé),  $a_{3n} = 0.115$  (estimé), et  $I_{cn} = 6.5 \text{ MPa}$  (estimé).
- Figure 21d. Description de la rupture et de la limite élastique du craie d'Epernay (en CTC) avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Nguyen 1972);  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 8 \text{ MPa}$  (mesuré),  $\sigma_{tn} = 0.1 \text{ MPa}$  (estimé),  $a_{3n} = 0.55$  (estimé), et  $I_{cn} = 30 \text{ MPa}$  (estimé).
- Figure 22. Description de la rupture et de la limite élastique d'un sol résiduel (aggloméré volcanique) en CTC avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Uriel et Serrano 1973);  $\phi = 25^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 300 \text{ kPa}$  (mesuré),  $\sigma_{tn} = 5 \text{ kPa}$  (estimé),  $a_{3n} = 0.063$  (estimé), et  $I_{cn} = 100 \text{ kPa}$  (estimé).
- Figure 23. Description de la rupture et de la limite élastique d'un remblai en pâte en CTC avec le critère  $\text{MSDP}_u$  (données tirées de Ouellet et Servant 2000); 6.5% ciment testé à 28 jours avec  $\phi = 23^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 580 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 50 \text{ kPa}$ ,  $a_{3n} = 0.14$ , et  $I_{cn} = 100 \text{ kPa}$ ; 6.5% ciment à 3 jours avec  $\phi = 32^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 200 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 0.5 \text{ kPa}$ ,  $a_{3n} = 0.14$ , et  $I_{cn} = 100 \text{ kPa}$ ; 3% ciment testé à 15 jours avec  $\phi = 37^\circ$ ,  $\sigma_{cn} = 10 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 0 \text{ kPa}$ ,  $a_{3n} = 0.14$ , et  $I_{cn} = 150 \text{ kPa}$ .
- Figure 24. Description de la résistance d'un sable lâche de Monterey avec le critère  $\text{MSDP}_u$  ( $n = 43.8\%$ );  $\sigma_{cn} = 3 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 0$ ,  $\phi \approx 38^\circ$ ,  $b = 0.75$ ,  $I_{cn} \gg$  (ou  $a_{3n} = 0$ ),  $\Gamma = 1$ ,  $v_1 = 0$  (données tirées de Lade et Duncan 1973).
- Figure 25. Description de la résistance d'un sable dense de Monterey avec le critère  $\text{MSDP}_u$  ( $n = 36.3\%$ );  $\sigma_{cn} = 160 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_{tn} = 0$ ,  $\phi \approx 38^\circ$ ,  $b = 0.75$ ,  $I_{cn} \gg$  (ou  $a_{3n} = 0$ ),  $\Gamma = 1$ ,  $v_1 = 0$  (données tirées de Lade et Duncan 1973).

- Figure 26. Variation de la résistance en compression uniaxiale d'un plâtre en fonction de la porosité (données tirées de Nguyen 1972); régression avec  $x_1 = 1.334$ ,  $x_2 = 16.013$ ,  $\sigma_{c0} = 27.35$  MPa, et  $n_{Cc} = 100\%$ .
- Figure 27. Description et prédiction de la résistance en CTC du plâtre (rapport eau/plâtre = 70%) avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Nguyen 1972); description (ligne foncée) pour  $n = 43.25\%$  avec  $\phi = 30^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 16$  MPa (calculé),  $\sigma_{tn} = 2.7$  MPa (calculé),  $I_{1n} = 82.4$  MPa (mesuré),  $I_{cn} = 45$  MPa (estimé), et  $a_{3n} = 0.482$  (calculé); prédictions (lignes fines) avec  $I_{1n}' = 50.6$  MPa,  $I_{cn}' = 27.6$  MPa, et  $p = 0.898$ .
- Figure 28a. Description de la résistance en compression uniaxiale des grès avec  $x_1 = 1.21$ ,  $x_2 = 25.39$ ,  $\sigma_{c0} = 193.04$  MPa, et  $n_{Cc} = 51.94\%$  (données tirées de Farquhar et al. 1993, 1994).
- Figure 28b. Description de la résistance en CTC du grès de Berea avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Wong et al. 1992); description (ligne foncée) pour  $n = 10.5\%$  avec  $\phi = 32^\circ$  (estimé),  $\sigma_{cn} = 163.6$  MPa (estimé),  $\sigma_{tn} = 3.8$  MPa (calculé),  $I_{1n} = 1619.8$  MPa (mesuré),  $I_{cn} = 380$  MPa (estimé), et  $a_{3n} = 0.1507$  (calculé); prédictions (lignes fines) avec  $I_{1n}' = 538.6$  MPa,  $I_{cn}' = 126.4$  MPa, et  $p = 0.436$ .
- Figure 29a. Obtention des paramètres pour la résistance en compression uniaxiale d'un basalte broyé à partir d'une série d'essais CTC à faible confinement ( $\sigma_3 = 0.413$  MPa) (données tirées de Al-Hussaini 1983):  $x_1 = 1.261$ ,  $x_2 = 1.553$ ,  $\sigma_{c0} = 5.42$  MPa ( $\sigma_{c0}$  est la résistance en compression uniaxiale à  $n = 0$ ), et  $n_{Cc} = 80\%$ .
- Figure 29b. Estimation des paramètres à partir d'une série d'essais en CTC sur le basalte broyé, avec  $n = 33.55\%$ :  $\sigma_{cn} = 1.384$  MPa,  $\sigma_{tn} = 0$  MPa, et  $\phi = 35.64^\circ$  (données tirées de Al-Hussaini 1983).
- Figure 29c. Description et prédiction de la résistance en CTC du basalte broyé avec le critère  $MSDP_u$  (données tirées de Al-Hussaini 1983) avec les paramètres déduits de la figure 29b:  $\sigma_{c0} = 2.396$  MPa, et  $\sigma_{tn} = 0$  MPa.
- Figure 30a. Obtention des paramètres pour décrire la résistance d'un sel gemme broyé (données tirées de Liedtke et Bleich 1985) avec  $x_1 = 0.861$ ,  $x_2 = 30.285$ ,  $\sigma_{c0} = 27.27$  MPa et  $n_{Cc} = 81.91\%$ .
- Figure 30b. Description et prédiction de la résistance du sel gemme broyé en CTC avec les paramètres déduits à la figure 30a; les paramètres  $\phi = 35.2^\circ$ , et  $\sigma_{t0} = 0$  MPa ont été estimés à partir des données obtenues à  $n = 0\%$  (données tirées de Liedtke et Bleich 1985).
- Figure 31. Les surfaces de  $MSDP_u$  avec la fonction  $F_\pi$  (éqs. (11) et (12)) dans le plan octaédral ( $\pi$ ) avec  $\Gamma = 1$  (la figure est normalisée pour obtenir  $F_\pi = 1$  à  $\theta = 30^\circ$ ).
- Figure 32. Les surfaces de  $MSDP_u$  avec les nouvelles fonctions  $F_\pi$  (éqs. (18) et (19)) dans le plan octaédral ( $\pi$ ).





**L'École Polytechnique se spécialise dans la formation d'ingénieurs et la recherche en ingénierie depuis 1873**



**École Polytechnique de Montréal**

**École affiliée à l'Université  
de Montréal**

Campus de l'Université de Montréal  
C.P. 6079, succ. Centre-ville  
Montréal (Québec)  
Canada H3C 3A7

[www.polymtl.ca](http://www.polymtl.ca)

